

1- تعريف

ليكن  $I$  جزء من  $\mathbb{N}$

المتتالية العددية هي تطبيق من  $I$  نحو  $\mathbb{R}$

اصطلاحات

\*-  $u: I \rightarrow \mathbb{R}$  متتالية عددية

يرمز لصورة  $n$  بواسطة  $u_n$  عوض  $u(n)$ . العدد  $u_n$  يسمى حد المتتالية ذا المدل  $n$  ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ  $(u_n)_{n \in I}$  عوض  $u$ .

$\{u_n / n \in I\}$  هي مجموعة قيم المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$ .

\*- اذا كان  $I = \mathbb{N}$  فانه يرمز للمتتالية بـ  $(u_n)_{n \geq 0}$  أو  $(u_n)$

• اذا كان  $I = \mathbb{N}^*$  فانه يرمز للمتتالية بـ  $(u_n)_{n \geq 1}$

• اذا كان  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$  فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ  $(u_n)_{n \geq n_0}$

2- المتتالية المكورة - المتتالية المصغورة

تعريف

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  مكورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي  $M$  بحيث  $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي  $m$  بحيث  $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية  $(u_n)_{n \in I}$  محدودة اذا وفقط اذا كانت  $(u_n)_{n \in I}$  مكورة و مصغورة

ملاحظة  $(u_n)_{n \in I}$  محدودة  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in I \quad |u_n| \leq k$

رتابة متتالية

لتكن  $(u_n)_{n \in I}$  متتالية حيث  $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$

$(u_n)_{n \in I}$  متتالية تزايدية  $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

$(u_n)_{n \in I}$  متتالية تزايدية قطعاً  $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} > u_n$

$(u_n)_{n \in I}$  متتالية تناقصية  $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

$(u_n)_{n \in I}$  متتالية تناقصية قطعاً  $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} < u_n$

$(u_n)_{n \in I}$  متتالية ثابتة  $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

### 3- المتتالية الحسابية

#### تعريف

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي  $r$  بحيث  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = u_n + r$  العدد  $r$  يسمى أساس المتتالية .

#### الخاصة المميزة

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  حسابية اذا وفقط اذا كان  $\forall n > n_0 \quad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$

#### صيغة الحد العام

#### خاصة

اذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فان  $\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

#### ملاحظة

- اذا كان  $(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فان  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr$
- اذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فان  $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 + (n-1)r$
- اذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية أساسها  $r$  فان  $\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p + (n-p)r$

#### مجموع حدود متتالية لمتتالية حسابية

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية حسابية

اذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فان  $S_n = \frac{(n-p)(u_p + u_{n-1})}{2}$

$n-p$  هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول للمجموع  $S_n$  و  $u_{n-1}$  هو الحد الأخير للمجموع  $S_n$

#### ملاحظة

- اذا كان  $(u_n)$  متتالية حسابية فان  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n(u_0 + u_{n-1})}{2}$
- اذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية حسابية فان  $S_n$  مجموع  $n$  حدا أولا منها هو  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$

### 4- المتتالية الهندسية

#### تعريف

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي  $q$  بحيث  $\forall n \geq n_0 \quad u_{n+1} = qu_n$  العدد  $q$  يسمى أساس المتتالية .

#### الخاصة المميزة

تكون متتالية  $(u_n)_{n \geq n_0}$  هندسية اذا وفقط اذا كان  $\forall n > n_0 \quad u_n^2 = u_{n+1} \cdot u_{n-1}$

#### صيغة الحد العام

إذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $\forall n \geq n_0 \quad u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

ملاحظة - إذا كان  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 q^n$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $\forall n \geq 1 \quad u_n = u_1 q^{n-1}$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  فإن  $\forall n \geq p \geq n_0 \quad u_n = u_p q^{n-p}$

مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1

إذا كان  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1}$  فإن  $S_n = u_p \left( \frac{1-q^{n-p}}{1-q} \right)$

$n-p$  هو عدد حدود المجموع  $S_n$  و  $u_p$  هو الحد الأول للمجموع  $S_n$

ملاحظة

- إذا كان  $(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1 فإن  $S_n$  مجموع  $n$  حداً أولاً منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

- إذا كان  $(u_n)_{n \geq 1}$  متتالية هندسية أساسها  $q$  يخالف 1 فإن  $S_n$  مجموع  $n$  حداً أولاً منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left( \frac{1-q^n}{1-q} \right)$$

حالة خاصة

إذا كانت  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية هندسية أساسها 1 فإن  $S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} = u_p (n-p)$

5- المتتالية من نوع  $u_{n+1} = au_n + b$  حيث  $a \neq 1$   $b \neq 0$  (E)

توجد متتالية ثابتة  $\alpha$  هي حل المعادلة  $ax + b = x$  تحقق العلاقة (E)

لنحدد  $u_n$

لدينا  $u_{n+1} = au_n + b$  و  $\alpha = a\alpha + b$  ومنه  $u_{n+1} - \alpha = a(u_n - \alpha)$

إذن  $(u_n - \alpha)$  متتالية هندسية أساسها  $a$  وحدها الأول  $u_0 - \alpha$

ومنه  $u_n = (u_0 - \alpha)a^n + \alpha$

6- المتتالية الترجعية  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

أ- المعادلة المميزة

تعريف

المعادلة  $q^2 - aq - b = 0$  تسمى المعادلة المميزة للعلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

ب- تحديد المتتاليات التي تحقق  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

خاصة

• إذا كانت المعادلة المميزة للعلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  تقبل حلين حقيقيين مختلفين  $q_1$  و  $q_2$  فإن أي

متتالية  $(u_n)$  تحقق العلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  نكتب  $u_n = \alpha(q_1)^n + \beta(q_2)^n$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان

حقيقيان اعتباطيان.

• إذا كانت المعادلة المميزة للعلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  تقبل حلا حقيقيا مزدوجا  $q$  فإن أي متتالية  $(u_n)$  تحقق العلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  تكتب  $u_n = (\alpha + \beta n)(q)^n$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان اعتباطيان.

• إذا كانت المعادلة المميزة للعلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$  تقبل حلين عقدين  $q_1 = [r; \theta]$  و  $q_2 = [r; -\theta]$  فإن أي متتالية  $(u_n)$  تحقق العلاقة  $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

تكتب  $u_n = \alpha(r)^n \sin(n\theta) + \beta(r)^n \cos(n\theta)$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان اعتباطيان.

تمرين (متتالية فيبونتشي FIBONACCI)

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{أوجد المتتالية } (u_n) \text{ حيث}$$

تمرين

$$\begin{cases} u_0 = -2 & u_1 = 3 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{أوجد المتتالية } (u_n) \text{ حيث}$$

تمرين

$$\begin{cases} u_0 = 1 & u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 5u_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{أوجد المتتالية } (u_n) \text{ حيث}$$

## نهايات المتتاليات

### 1- تعريف

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n > A \quad \Leftrightarrow \quad \lim u_n = +\infty$$

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n < -A \quad \Leftrightarrow \quad \lim u_n = -\infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim u_n = l$$

### تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط كانت نهايتها منتهية.

نقول إن متتالية متباعدة إذا و فقط كانت غير متقاربة.

### 2- مصادق التقارب

مصدق 1 لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - l| \leq v_n \quad \text{حيث } l \text{ عدد حقيقي}$$

إذا كان  $\lim v_n = 0$  فإن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  متقاربة و  $\lim u_n = l$

مصدق 2 لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  متتاليتين عدديتين حيث  $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad u_n \leq v_n$

إذا كان  $\lim u_n = +\infty$  فإن  $\lim v_n = +\infty$

إذا كان  $\lim v_n = -\infty$  فإن  $\lim u_n = -\infty$

### لازمة

لتكن  $(u_n)_{n \geq n_0}$  و  $(v_n)_{n \geq n_0}$  و  $(w_n)_{n \geq n_0}$  ثلاث متتاليات حيث

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad v_n \leq u_n \leq w_n$$

إذا كان  $\lim v_n = \lim w_n = l$  فإن  $\lim u_n = l$

### 3- نهاية $q^n$ خاصة

إذا كان  $q > 1$  فإن  $\lim q^n = +\infty$

إذا كان  $q = 1$  فإن  $\lim q^n = 1$

إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim q^n = 0$

إذا كان  $q \leq -1$  فإن  $(q^n)$  ليست لها نهاية

#### ملاحظة

\*- المتتالية  $(q^n)$  متقاربة إذا كان  $-1 < q \leq 1$

\*- ليكن  $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان  $r > 0$  فإن  $\lim_{+\infty} n^r = +\infty$

إذا كان  $r < 0$  فإن  $\lim_{+\infty} n^r = 0$

#### 4- خاصيات

##### خاصية

كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

##### مبرهنة

كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة

كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

#### ملاحظة

كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة  
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

#### 5- متتاليات من نوع $f(u_n)$

##### خاصية

لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة بالعلاقة  $u_{n+1} = f(u_n)$  بحيث يوجد مجال  $I$  ضمن  $D_f$  و  $N$  من  $\mathbb{N}$

حيث  $u_n \in I \quad \forall n \geq N$  و  $f$  متصلة على  $I$  و  $f(I) \subset I$ .

إذا كانت  $(u_n)$  متتالية متقاربة فان نهايتها هي حل للمعادلة  $f(l) = l$

##### تمرين

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n (1 - u_n) \end{cases} \quad \text{نعتبر } (u_n) \text{ متتالية حيث}$$

بين أن  $(u_n)$  متقاربة و حدد نهايتها

#### 6- المتتاليات المتحادات

##### خاصية

إذا كان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتين بحيث

-  $u_n \leq v_n$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

-  $(u_n)$  تزايدية و  $(v_n)$  تناقصية

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0 -$$

فان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان و لهما نفس النهاية

نقول إن المتتاليتين متحاديتان