الأعداد العقدية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

مبرهنة

توجد مجموعة $\mathbb{C}$ تتضمن $\mathbb{R}$ و تحقق:

i) يحتوي $\mathbb{C}$ على عنصر غير حقيقي i و يحقق $i^2=-1$

ii) كل عنصر من $\mathbb{C}$ يكتب بكيفية و حيدة على الشكل: $a+ib$ بحيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

iii) المجموعة $\mathbb{C}$ مزودة بعمليتي الجمع و الضرب تمددان نفس العمليتين في $\mathbb{R}$ و لهما نفس

الخاصيات

خاصية ليكن $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ و $(a';b')\in\mathbb{R}^2$ $a+ib=a'+ib' \Leftrightarrow a=a'$ و $b=b'$

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

العدد a يسمى الجزء الحقيقي نكتب $\mathrm{Re}(z)=a$ ، و العدد b يسمى الجزء التخيلي نكتب $\mathrm{Im}(z)=b$

خاصية $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي

1- التمثيل الهندسي لعدد عقدي

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$.

كل نقطة $M(a;b)\in(P)$ هي صورة عدد عقدي وحيد $z=a+ib$ وهذا الأخير يسمى لحق M ونكتب M(z)

أو $z=aff(M)$

العدد العقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ يسمى أيضا لحق المتجهة $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ نكتب $z=aff(\vec{u})$

* لحق $\overrightarrow{AB}$ هو z_B-z_A حيث $A(z_A)$ و $B(z_B)$

* تكون النقط المختلفة $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ مستقيمية إذا و فقط إذا كان $\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in\mathbb{R}$

* التطبيق $M(z)\to M'(z+a)$ من المستوى (P) نحو المستوى (P) هو الازاحة التي متجهتها

$\vec{u}$ حيث $aff(\vec{u})=a$

2- المرافق و المعيار

ليكن عدد عقدي $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$.

* العدد العقدي $z=a-ib$ يسمى مرافق العدد العقدي $z=a+ib$ ونرمز له بـ $\bar{z}=a-ib$.

* العدد الحقيقي $\sqrt{z\bar{z}}$ يسمى معيار العدد العقدي $z=a+ib$. نرمز له بـ $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$

لتكن $(z;z')\in\mathbb{C}^2$ و $\alpha\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{Z}^*$

* $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}(z)$; $z-\bar{z}=2\operatorname{Im}(z)i$

* $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$ $\quad$ $\overline{z.z'}=\bar{z}.\bar{z}'$ $\quad$ $\overline{z^n}=\bar{z}^n$ $\quad$ $\overline{\alpha z}=\alpha.\bar{z}$ $\quad$ $z'\neq 0$ $\quad$ $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

* $\left|\sum_{i=1}^{i=m}z_i\right|\leq\sum_{i=1}^{i=m}|z_i|$ $\quad$ $m\in\mathbb{N}^*$

* $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=z$

* $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\bar{z}=-z$

* $|z.z'|=|z||z'|$ $\quad$ $|z^n|=|z|^n$ $\quad$ $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ $\quad$ $z'\neq 0$

* $\|\overrightarrow{AB}\|=AB=|z_B-z_A|$

3- الشكل المثلثي لعدد عقدي والعمدة

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$

ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و النقطة M صورته , وليكن α قياسا

للزاوية $\widehat{(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})}$.

العدد α يسمى عمدة للعدد العقدي z و نكتب $[2\pi]$ $\quad$ $\arg z\equiv\alpha$.

-* ليكن $z=a+ib$ حيث $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ عددا عقديا غير منعدم و r عددا حقيقيا موجبا قطعا و α

عددا حقيقيا $\quad$ نضع $|z|=r=\sqrt{a^2+b^2}$

ومنه $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ حيث $\sin\alpha=\frac{b}{r}$; $\cos\alpha=\frac{a}{r}$ إذن $[2\pi]$ $\quad$ $\arg z\equiv\alpha$

الكتابة $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ تسمى الشكل المثلثي للعدد العقدي z و نكتب $z=[r,\alpha]$

خاصيات

*- اذا كان $z=[r,\alpha]$ و $z'=[r',\alpha']$ فان + $zz'=[rr',\alpha+\alpha']$ و $\frac{z}{z'}=\left[\frac{r}{r'},\alpha-\alpha'\right]$

+ $\bar{z}=[r,-\alpha]$ و $-z=[r,\alpha+\pi]$

+ $z^n=[r^n;n\alpha]$ $\frac{1}{z}=\left[\frac{1}{r};-\alpha\right]$

صيغة موافر $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ $\forall n\in\mathbb{Z}^*$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

إذا كان $A(z_A)\neq B(z_B)$ و $D(z_D)\neq C(z_C)$ فان $\arg(z_B-z_A)=(\overline{\vec{e}_1;\overrightarrow{AB}})$ $[2\pi]$

و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ $[2\pi]$

4- الكتابة الاسية

$z=[r,\alpha]=re^{i\alpha}$ $\sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ $\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$

5- الجذور النونية لعدد عقدى غير منعدم

الجذور النونية $a=[r,\alpha]$ (جذور المعادلة $z^n=a$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$)هي

$z_k=\left[\sqrt[n]{r};\frac{\alpha}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right]$ $k\in\{0;1;2........,n-1\}$

الجذور النونية للوحدة أي الجذور النونية لـ 1 هي $z_k=\left[1;\frac{2k\pi}{n}\right]$ $k\in\{0;1;2;..........;n-1\}$

6- المعادلات من الدرجة الثانية

لتكن a و b و c أعدادا عقدية بحيث a غير منعدم .

المعادلة $az^2+bz+c=0$ تقبل حلين في $\mathbb{C}$ هما $z_1=\frac{-b+d}{2a}$; $z_2=\frac{-b-d}{2a}$ حيث d جدر

مربع للمميز b^2-4ac .

7- تطبيقات هندسة

خاصية

ليكن z_A و z_B عددين غير منعدمين صورتهما على التوالي A و B .

النقطة $M(z_A\times z_B)$ تحقق المثلث OMB منشابه مباشرة مع المثلث OAI حيث $OB=\frac{BM}{IA}=\frac{OM}{OA}$

خاصية

كل دوران مركزه Ω ذات اللحق ω و قياس زاويته θ هو التطبيق في المستوى العقدي الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = ze^{i\theta} + \omega(1-e^{i\theta})$

خاصية

ليكن a و b عددين عقدين بحيث $a \neq 1$; $|a| = 1$

التطبيق F في المستوى الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بنقطة $M'(z')$ حيث $z' = az + b$ هو الدوران الذي مركزه $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$ و زاويته $\arg(a)$