

I- الاشتقاق في نقطة- الدالة المشتقة

(A) أنشطة

نشاط 1

باستعمال التعريف ادرس اشتقاق الدالة f في x_0 و حدد العدد المشتق في x_0 إن وجد ثم حدد معادلة المماس أو نصف المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الأضلاع x_0 في الحالات التالية

أ- $f(x) = x^2 - 2x$ $x_0 = 1$ - ب $f(x) = x^2 - 4$ $x_0 = 2$

ج- $x_0 = 0$ $\begin{cases} f(x) = \sin x & x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - 2x & x > 0 \end{cases}$

نشاط 2

حدد الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد مجموعة تعريف كل من f و f' في الحالات التالية

أ- $f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 1$ - ب $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-1}$

ج- $f(x) = \sin 2x \cos x$ - د $f(x) = 1 + \tan^2 x$

نشاط 3

حدد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \cos \pi x}{x-1}$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$

(B) تذكير

1- الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة في مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l في x_0 ونرمز لها

ب $f'(x_0)$. العدد l يسمى العدد المشتق ل f في x_0 . نكتب $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ب- خاصية

كل دالة قابلة للاشتقاق في x_0 تكون متصلة في x_0

2 - الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $[x_0; x_0 + a[$ حيث $a > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليمين في

x_0 ونرمز لها ب $f'_d(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليمين في x_0 نكتب $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من شكل $]x_x - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$

نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في x_0 إذا كانت للدالة $x \rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ نهاية l على اليسار في

x_0 ونرمز لها ب $f'_g(x_0)$.

العدد l يسمى العدد المشتق ل f على اليسار في x_0 نكتب $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

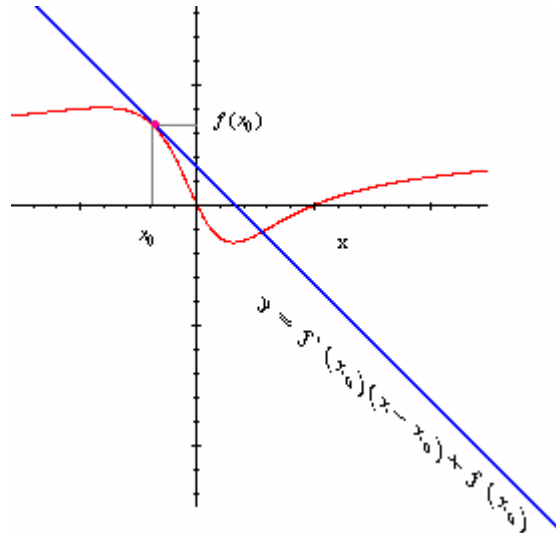
ب - خاصة

تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 والعدد المشتق على اليمين يساوي العدد المشتق على اليسار.

3- التاويل الهندسي - معادلة المماس لمنحنى دالة

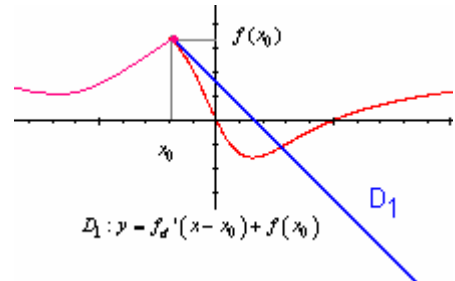
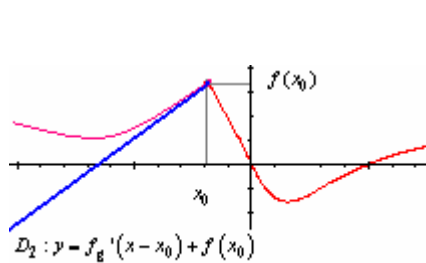
أ- المماس

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و C_f منحنىها قابلة اشتقاق في x_0 في تؤول هندسيا بوجود مماس لـ C_f عند النقطة ذات الأضول x_0 معادلته

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$


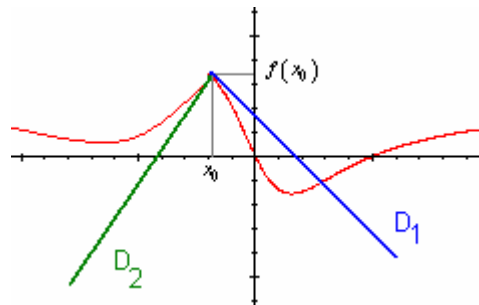
ب- نصف المماس

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في x_0 (أو على اليسار في x_0) فإن C_f يقبل نصف مماس عند النقطة ذات الأضول x_0 معامله الموجه $f'_d(x_0)$ (أو $f'_g(x_0)$)



$$D_2 : y = f'_g(x - x_0) + f(x_0) \quad x < x_0$$

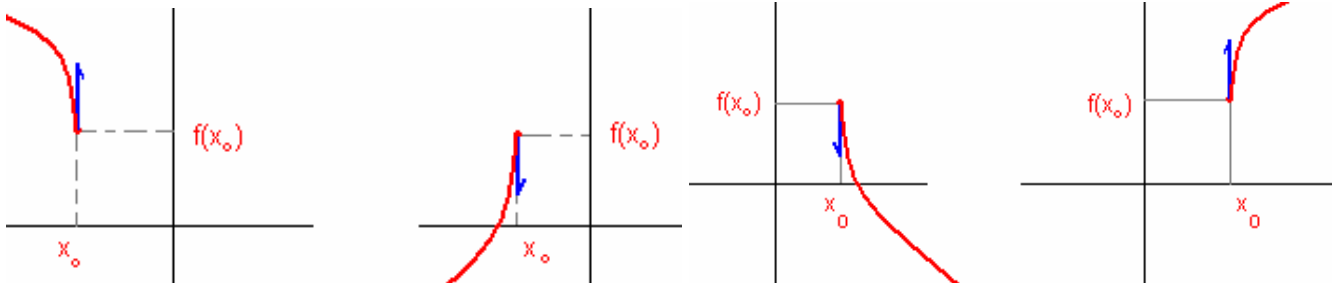
$$D_1 : y = f'_d(x - x_0) + f(x_0) \quad x \geq x_0$$



$$D_1 : y = f'_d(x - x_0) + f(x_0) \quad x \geq x_0$$

$$D_2 : y = f'_g(x - x_0) + f(x_0) \quad x < x_0$$

إذا كانت f متصلة في x_0 و كان $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ فان C_f نصف مماس مواز لمحور الأرتاب.



4- الدالة المشتقة

أ- تعريف

نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
الدالة التي تربط كل عنصر x من I بالعدد $f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة نرملها بـ f' .

ب- عمليات على الدوال المشتقة

*- لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(\lambda f)' = \lambda f'(x)$$

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^ - \{1\}$

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{Z}_-$ و f لا تنعدم على I

$$\forall x \in I \quad (f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$$

II- مشتقة دالة مركبة - مشتقة الدالة العكسية

1- مشتقة دالة مركبة

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$
إذا كان x_0 عنصرا من I و كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و g قابلة للاشتقاق في $f(x_0)$ فان $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في x_0 .

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

تمرين أحسب $f'(x)$ بعد تحديد مجموعة تعريف الدالة المشتقة f' في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad (b) \quad ; \quad f(x) = \cos(x^3 - 4x^2) \quad (a)$$

2- مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I
إذا كان x_0 عنصراً من I وكانت f قابلة للاشتقاق في x_0 و $f'(x_0) \neq 0$ فإن الدالة f^{-1} للاشتقاق في $f(x_0)$ و $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

خاصية

لتكن f دالة رتبية قطعاً وقابلة للاشتقاق على مجال I و f' لا تنعدم على I

$$\forall x \in f(I) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

3- تطبيقات

أ مشتقة دالة الجذر من الرتبة n

خاصية

* ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* ولدينا $(\sqrt[n]{x})' = \left((x)^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
* ليكن r من \mathbb{Q}^* . الدالة $x \rightarrow x^r$ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R}_+^* ولدينا $(x^r)' = r x^{r-1}$

خاصية

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعاً على I و $n \in \mathbb{N}^*$ فإن الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{f(x)}$ قابلة للاشتقاق على I .

$$\forall x \in I \quad \left(\sqrt[n]{f(x)} \right)' = \left((f(x))^{\frac{1}{n}} \right)' = \frac{1}{n} (f(x))^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'(x)$$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و f موجبة قطعاً على I و $r \in \mathbb{Q}$.

$$\forall x \in I \quad \left((f(x))^r \right)' = r (f(x))^{r-1} \cdot f'(x)$$

تمرين أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية

$$f(x) = (x^2 - 1)^{\frac{2}{5}} - 3 \quad f(x) = \sqrt[3]{x-3}^2 - 2 \quad f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2} - 1$$

$$f(x) = -2x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{3}{2}} - 5 \quad f(x) = \left((x^2 - 1)^2 \right)^{\frac{1}{5}} - 4$$

ب- مشتقة الدوال العكسية للدوال المثلثية

الدالة \arctan هي الدالة العكسية للدالة f المعرفة من $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ نحو \mathbb{R} بـ $f(x) = \tan x$

بما أن f قابلة للاشتقاق و موجبة قطعاً على $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ فإن الدالة \arctan قابلة

$$\text{للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ و } \arctan' x = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

خاصية

* الدالة \arctan قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} و $\arctan' x = \frac{1}{x^2 + 1}$
* الدالتان قوس الجيب و قوس جيب التمام قابلتان للاشتقاق على $] -1; 1[$

$$\forall x \in]-1;1[\quad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1;1[\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{و}$$

خاصية

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I فان الدالة $\arctan \circ u$ قابلة للاشتقاق على I

$$\forall x \in I \quad (\arctan \circ u(x))' = \frac{u'(x)}{1 + (u(x))^2} \quad \text{و}$$

* إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I و $u(I) \subset]-1;1[$ فان الدالة $\arcsin \circ u$ و $\arccos \circ u$ قابلتان

للاشتقاق على I

$$\forall x \in I \quad (\arccos \circ u(x))' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}}$$

$$\forall x \in I \quad (\arcsin \circ u(x))' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - (u(x))^2}} \quad \text{و}$$

ملاحظات

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}{x-1} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{2}}{x+1} = +\infty \quad \diamond$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{x-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\arcsin x}{x+1} = -\infty \quad \diamond$$

تمرين أحسب مشتقة f بعد تحديد حيز تعريفها في الحالات

$$f(x) = \arctan \sqrt[3]{x} \quad f(x) = \arctan \sqrt{\frac{2-x}{x}}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \arccos \frac{1}{1+x} \quad f(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsin\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \frac{\pi}{2}}{x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arccos(1-2x)}{4x^2-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2+3x)}{x} \quad \text{حدد} \quad \text{تمرين}$$

D_f	$f'(x)$	$f(x)$
\mathbb{R}	0	a
\mathbb{R}	1	x
\mathbb{R}^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad x^n$
\mathbb{R}^*	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}^{*-} \quad x^n$
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}
$\{x \in D_u, / u(x) > 0\}$	$\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$\sqrt{u(x)}$
\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{n} x^{n-1}$	$n \in \mathbb{N}^* \quad x^n$
\mathbb{R}_+^*	rx^{r-1}	$r \in \mathbb{Q} \quad x^r$
\mathbb{R}	$-\sin x$	$\cos x$
\mathbb{R}	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$1 + \tan^2 x$	$\tan x$
\mathbb{R}	$-a \sin(ax + b)$	$\cos(ax + b)$
\mathbb{R}	$a \cos(ax + b)$	$\sin(ax + b)$
\mathbb{R}	$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x$
D_u	$\frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$	$\arctan(u(x))$
$] -1; 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\{x \in D_u, / u(x) \in] -1; 1[\}$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\arcsin(u(x))$
$] -1; 1[$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\{x \in D_u, / u(x) \in] -1; 1[\}$	$\frac{-u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\arccos(u(x))$

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I
 نقول إن دالة F هي دالة أصلية للدالة f على I إذا كانت F قابلة للاشتقاق على I وكان
 $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

أمثلة الدالة $F : x \rightarrow x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$ على \mathbb{R}

الدالة $F : x \rightarrow \cos x + 3$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow -\sin x$ على \mathbb{R}

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على مجال I
 مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي المجموعة المكونة من الدوال $F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

أمثلة - الدالة $F : x \rightarrow x^2 + 2x$ دالة أصلية للدالة $f : x \rightarrow \frac{1}{2}x + 2$ على \mathbb{R}

إذن الدوال الأصلية لـ f هي الدوال F_λ المعرفة على \mathbb{R} بـ $F_\lambda(x) = x^2 + 2x + \lambda$

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على مجال I ليكن x_0 من I و y_0 من \mathbb{R}
 توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على مجال I بحيث $G(x_0) = y_0$.

مثال نحدد دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R} حيث $f(x) = x^3 - 2x + 3$ التي تأخذ القيمة 2 عند 1

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على مجال I على التوالي وكان $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن
 $F + G$ * دالة أصلية لـ $f + g$
 λF * دالة أصلية لـ λf

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 & x \geq 2 \\ f(x) = x^2 - 5 & x < 2 \end{cases}$$

بين أن f تقبل دالة أصلية على \mathbb{R} و حدد الدوال الأصلية لـ f .

1- حدد دالة أصلية للدالة f على $]1; +\infty[$ $f(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{1}{3}} - 1$

(لاحظ أن $f(x) = \alpha u'(x)(u(x))^n$ حيث α و n معلومين)

2- حدد دوال أصلية للدالة f على \mathbb{R} $f(x) = \frac{3}{4x^2 + 4x + 2}$

(باستعمال الشكل القانوني نحصل على $f(x) = \alpha \frac{u'(x)}{(u(x))^2 + 1}$)

3- حدد دوال أصلية للدالة f على \mathbb{R} $f(x) = \cos^3 x$

(يتم اخطاط $f(x)$ بوضع $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$)

5- مبرهنة رول - مبرهنة التزايد المتناهية

أ- مبرهنة رول

مبرهنة

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a; b]$ تحقق الشروط التالية:

1- f متصلة على $[a; b]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a; b[$

3- $f(a) = f(b)$

فانه يوجد عنصر c من $]a; b[$ حيث $f'(c) = 0$

ملاحظات

❖ وجود c من $]a; b[$ حيث $f'(c) = 0$ لا يستثني وجود نقط أخرى k حيث $f'(k) = 0$

❖ لنطبق مبرهنة رول الشروط الثلاث ضرورية

❖ معطيات مبرهنة رول شروط كافية، لكنها غير لازمة

ب- مبرهنة التزايد المتناهية

إذا كانت دالة f معرفة على المجال $[a; b]$ تحقق الشرطين التاليين:

1- f متصلة على $[a; b]$

2- f قابلة للاشتقاق على $]a; b[$

فانه يوجد عنصر c من $]a; b[$ حيث $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$

ملاحظات

وجود c من $]a; b[$ حيث $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$ لا يستثني وجود نقط أخرى k

حيث $(b-a)f'(k) = f(b) - f(a)$

تمرين

1- بين أن $\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

2- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad |\sin x| \leq x$

ج- خاصة

لتكن f و g دالتين معرفتين على المجال $I = [x_0; +\infty[$ و قابلتين للاشتقاق على I

إذا كان $f(x_0) = g(x_0)$ و $f'(x) \geq g'(x)$ لكل x من I فان $f(x) \geq g(x)$ لكل x من I

ملاحظة: يمكن تعويض المجال I بـ $]x_0; a]$ أو $]x_0; a[$ أو $]a; x_0]$ أو $]a; x_0[$ و الخاصية تبقى سالحة

تمرين

1- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad x - \frac{x^3}{3} \arctan x$

2- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$

تمرين

ليكن $\alpha > 1$. نعتبر المتتالية $u_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$

بين أن $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة.