المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة. هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.

يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u , z , f ....)

حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هده المعادلة , و مجموعة هده الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هده المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

أ) $y'=0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $y(x)=1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة $y'=0$.

ب) $y'=x^2-1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x)=x^2-1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x\to x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to \frac{1}{3}x^2-x+k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II – حل المعادلة التفاضلية y´+ay=0

1- المعادلة التفاضلية $y'+ay=0$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى (لأنها لا تتضمن إلا المشتقة الأولى للمجهول y) ذات المعاملات الثابتة .

* اذا كان $a=0$ فان $y'=0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$

* اذا كان $a\neq 0$

نعلم أن $\left(e^{-ax}\right)'=-ae^{-ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ اذن $x\to e^{-ax}$ حل خاص للمعادلة $y'+ay=0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y'+ay=0$ نضع $y(x)=z(x)e^{-ax}$

ومنه $y'(x)=z'(x)e^{-ax}-az(x)e^{-ax}$

أي $y'(x)=z'(x)e^{-ax}-ay(x)$ و بالتالي $y'(x)+ay(x)=z'(x)e^{-ax}=0$

و منه $z'(x)=0$ و بالتالي $z(x)=\lambda$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x)=\lambda e^{-ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a=0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y'+ay=0$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{-ax}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'+ay=0$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to y_0e^{-a(x-x_0)}$

الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- حل المعادلة التفاضلية $y'+2y=0$

2- حل المعادلة التفاضلية $-y'+\frac{1}{3}y=0$; $y(1)=2$

2- حل المعادلة التفاضلية من نوع y'+ay²=0

تمرين نعتبر المعادلة $(E):\quad y'+3y^2=0$

أوجد الحل المعرف على $[1;+\infty[$ حيث $y(2)=\frac{1}{4}$ و لا ينعدم على $[1;+\infty[$

الحل

$$y'+3y^2=0 \Leftrightarrow \frac{-y'}{y^2}=3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}\right)'=3 \Leftrightarrow \frac{1}{y}=3x+k \quad /k\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y=\frac{1}{3x+k}$$

بما أن $y(2)=\frac{1}{4}$ فان $k=-2$ اذن $y(x)=\frac{1}{3x-2}$ $\quad \forall x\in[1;+\infty[\quad (3x-2\neq 0)$

III- حل المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0

1- المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0 حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

*- اذا كان $a=b=0$ فان $y''=0$

$$y''=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} \quad y'(x)=k \Leftrightarrow \exists(k;k')\in\mathbb{R}^2 \quad y(x)=kx+k'$$

الحل العام للمعادلة $y''=0$ هي مجموعة الدوال $x\to kx+k'$ بحيث $(k;k')\in\mathbb{R}^2$

*- اذا كان $b=0$ فان $y''+ay'=0$

$y''+ay'=0 \Leftrightarrow (y')'+ay'=0$ ومنه y' حل للمعادلة $z'+az=0$

و بالتالي $y'(x)=\lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y''+ay'=0$ هي الدوال الأصلية $x\to\lambda e^{-ax}$

أي الدوال $x\to\frac{-\lambda}{a}e^{-ax}+\mu$ $\quad (\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$

3 – حل المعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0$; $(a;b)\neq(0;0)$

a)- تذكير لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجال I

تكون f و g متناسبتين اذا و فقط اذا كان $\exists k\in\mathbb{R}\quad \forall x\in I \quad g(x)=kf(x)$

b) ليكن y_1 و y_2 حلين للمعادلة E و ليكن $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1+\beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة $E:\quad y''+ay'+by=0$ و كان $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ فان $\alpha y_1+\beta y_2$ حل للمعادلة E.

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية $E:\quad y''+ay'+by=0$ هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E.

ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية $E:\quad y''+ay'+by=0$ يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

d)– حل المعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0$; $(a;b)\in\mathbb{R}^2$

لنبحث عن حلول من نوع $y: x\to e^{rx}$; $r\in\mathbb{R}$

y حل للمعادلة $E \Leftrightarrow r^2e^x+are^x+be^x=0 \Leftrightarrow r^2+ar+b=0$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2+ar+b=0$ فان الدالة $x\to e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $r^2+ar+b=0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية
$(a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad ; \quad E: y''+ay'+by=0$
مميز هذه المعادلة هو a^2-4b

الحالة 1 اذا كان $a^2-4b \succ 0$ فان $r^2+ar+b=0$ تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 .
الدالتان $x \to e^{r_1x} \quad ; \quad x \to e^{r_2x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E
نلاحظ أن $x \to e^{r_1x} \quad ; \quad x \to e^{r_2x}$ غير متناسبين
اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان $a^2-4b=0$ فان $r^2+ar+b=0$ تقبل حل مزدوج r .
الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \to xe^{rx}$ حل للمعادلة E .
الدالتان $x \to e^{rx}$ و $x \to xe^{rx}$ غير متناسبتين لأن $x \to x\dfrac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.
اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha+\beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان $a^2-4b \prec 0$ فان $r^2+ar+b=0$ تقبل جذرين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$
$(q\neq 0)$

$$e^{r_1x}=e^{px}(\cos qx+i\sin qx)=e^{px}\cos qx+ie^{px}\sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \to e^{px}\sin x \quad ; \quad x \to e^{px}\cos x$ حلين للمعادلة E.
لاحظ $\left(q=\dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2} \quad ; \quad p=-\dfrac{a}{2}\right)$
و بما أن الدالتين $x \to e^{px}\sin x \quad ; \quad x \to e^{px}\cos x$ غير متناسبتين فان حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha\cos qx+\beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E: $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b)\in\mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2+ar+b=0$ المعادلة المميزة

*- اذا كان $a^2-4b \succ 0$ فان المعادلة المميزة لها جدرين مختلفين $r_1 \quad ; \quad r_2$
و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1x}+\beta e^{r_2x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2-4b=0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .
و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha+\beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

*- اذا كان $a^2-4b \prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1=p+iq$ و $r_2=p-iq$
و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha\cos qx+\beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$
يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$
الشرطان $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$ يسميان الشرطين البدئيين .
يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة لدينا

$$\alpha\cos qx+\beta\sin qx=k\left(\frac{\alpha}{k}\cos qx+\frac{\beta}{k}\sin qx\right)=k(\cos\varphi\cos qx+\sin\varphi\sin qx)=k\cos(qx-\varphi)$$

بوضع $k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$; $\sin\varphi=\frac{\beta}{k}$; $\cos\varphi=\frac{\alpha}{k}$

تستنتج اذا كان $a^2-4b\prec 0$ فان $x\to ke^{px}\cos(qx-\varphi)$ حيث k و φ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y''+2y'-\frac{5}{4}y=0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0)=1$; $y_1'(0)=-1$

2- حل المعادلة $y''+4y'+4y=0$ حيث $y(-1)=1$; $y'(-1)=0$

3- حل المعادلة $y''+2y'+5y=0$ حيث $y(0)=0$; $y'(0)=-1$

حالات خاصة

*- اذا كان $a\succ 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\alpha\cos\sqrt{a}x+\beta\sin\sqrt{a}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

*- اذا كان $a\prec 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\alpha e^{\sqrt{-a}x}+\beta e^{-\sqrt{-a}x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y''+2y=0$; $y''-4y=0$

IV- معادلات تفاضلية بطرف ثان

1- معادلة تفاضلية $y'+ay=f(x)$

أ- تعريف

المعادلة التفاضلية $E:\ y'+ay=f(x)$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة و بطرف ثان.

المعادلة التفاضلية $E':\ y'+ay=0$ تسمى المعادلة التفاضلية المرتبطة بالمعادلة التفاضلية E

ب- حل معادلة تفاضلية $E:\ y'+ay=f(x)$

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة E و y_1 حلا عاما للمعادلة E

و منه $y_0'+ay_0=f(x)$; $y_1'+ay_1=f(x)$ اذن $(y_1-y_0)'+a(y_1-y_0)=0$

و بالتالي y_1-y_0 هو z الحل العام للمعادلة $z'+az=0$ E'

اذن $y_1=z+y_0$

خاصية

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة $E:\ y'+ay=f(x)$ و z حلا عاما للمعادلة $E':\ y'+ay=0$

الحل العام للمعادلة E هو $y=z+y_0$

2- معادلة تفاضلية $y''+ay'+by=f(x)$

أ- تعريف

المعادلة التفاضلية $E:\ y''+ay'+by=f(x)$ تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة و بطرف ثان

المعادلة التفاضلية $E':\ y''+ay'+by=0$ تسمى المعادلة التفاضلية المرتبطة بالمعادلة التفاضلية E.

ب- حل معادلة تفاضلية $E:\ y''+ay'+by=f(x)$

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة E و y_1 حلا عاما للمعادلة E

و منه $y_0''+ay_0'+by_0=f(x)$; $y_1''+ay_1'+by_1=f(x)$

اذن $(y_1-y_0)''+a(y_1-y_0)'+b(y_1-y_0)=0$

و بالتالي y_1-y_0 هو z الحل العام للمعادلة $z''+az'+bz=0$ E' اذن $y_1=z+y_0$

خاصية

ليكن y_0 حلا خاصا للمعادلة $E:\ y''+ay'+by=f(x)$ و z حلا عاما للمعادلة $E':\ y''+ay'+by=0$.

الحل العام للمعادلة E هو $y = z + y_0$

3- تقنيات

a)*- لحل المعادلة التفاضلية $y'+ay=p(x)$ حيث p دالة حدودية

نبحث عن حل خاص للمعادلة $y'+ay=p(x)$

- إذا كان $a\neq 0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها n
- إذا كان $a=0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها $n+1$

ونطبق الخاصية

مثال حل $y'+2y=x^2-x$

*- لحل المعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=p(x)$ حيث p دالة حدودية درجتها n

نبحث عن حل خاص للمعادلة

- إذا كان $c\neq 0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها n
- إذا كان $b\neq 0$ و $c=0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها $n+1$
- إذا كان $c=0$ و $b=0$ فإننا نبحث حل خاص يكون دالة حدودية درجتها $n+2$

ونطبق الخاصية.

مثال حل $y''+3y'+2y=x^2+x$

b) *- لحل المعادلة التفاضلية $y'+ay=k\cos(\omega x-\varphi)$

نبحث عن حل خاص للمعادلة $y'+ay=k\cos(\omega x-\varphi)$ من نوع $x\to \alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ و نطبق الخاصية

مثال حل $y'+2y=3\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$

*- لحل المعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=k\cos(\omega x-\varphi)$

نبحث عن حل خاص للمعادلة E من نوع $x\to \alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ و نطبق الخاصية

مثال حل للمعادلة $y''+6y'+5y=3\cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$

c)*- لحل المعادلة التفاضلية $E \; : \quad y'+ay=ke^{\alpha x}$

نبحث عن حل خاص للمعادلة E من نوع $x\to(ax+b)e^{\alpha x}$ و نطبق الخاصية

مثال حل $y'+2y=4e^{x}$ و $y'+2y=4e^{-2x}$

*- لحل المعادلة التفاضلية $E \; : \quad y''+ay'+by=ke^{\alpha x}$

نبحث عن حل خاص للمعادلة E من نوع $x\to\left(ax^2+bx+c\right)e^{\alpha x}$ و نطبق الخاصية

مثال حل المعادلتين $y''-5y'+6y=3e^{2x} \quad ; \quad y''-5y'+6y=3e^{4x}$

*- لحل المعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=e^{\alpha x}\times P(x)$

نبحث عن حل خاص للمعادلة E من نوع $x\to Q(x)\times e^{\alpha x}$ حيث $Q(x)$ حدودية

هناك ثلاث حالات

- إذا كان α ليس حلا للمعادلة التفاضلية المميزة $r^2+ar+b=0$ فان $d^0(Q)=n$
- إذا كان α حل مزدوج للمعادلة التفاضلية المميزة $r^2+ar+b=0$ فان $d^0(Q)=n+2$
- إذا كان α أحد الحلين المختلفين للمعادلة التفاضلية المميزة $r^2+ar+b=0$ فان $d^0(Q)=n+1$

و نطبق الخاصية