المتتاليات

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

I- المتتاليات: تعاريف و خاصيات

1- تعريف

ليكن I جزء من $\mathbb{N}$
المتتالية العددية هي تطبيق من I نحو $\mathbb{R}$

اصطلاحات

-* $u: \quad I \to \mathbb{R}$ متتالية عددية

يرمز لصورة n بواسطة u_n عوض $u(n)$. العدد u_n يسمى حد المتتالية ذا المدل n ويسمى أيضا الحد العام.

يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\in I}$ عوض u.

-* اذا كان $I=\mathbb{N}$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 0}$ أو (u_n)

-* اذا كان $I=\mathbb{N}^*$ فانه يرمز للمتتالية بـ $(u_n)_{n\geq 1}$

-* اذا كان $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$ فانه يرمز للمتتالية أيضا بـ $(u_n)_{n\geq n_0}$

ملاحظة

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ منتهية إذا كانت المجموعة I منتهية

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n\geq 2}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$u_n=(-2)^n+3n$ و $v_n=2n^2-3n$ و $\begin{cases} w_1=-2 \\ w_{n+1}=2w_n+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

أحسب الحدود الأربعة الأولى لكل من المتتاليات (u_n) و $(v_n)_{n\geq 2}$ و $(w_n)_{n\geq 1}$

2- مجموعة القيم لمتتالية

تعريف

$\{u_n/n\in I\}$ هي مجموعة قيم المتتالية $(u_n)_{n\in I}$.

مثال نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_n=(-1)^n$

مجموعة القيم للمتتالية (u_n) هي $\{-1;1\}$

3- تساوي متتاليتين

تعريف

تكون متتاليتان $(u_n)_{n\in I}$ و $(v_n)_{n\in I}$ متساويتين اذا و فقط اذا كان $u_n=v_n \quad \forall n\in I$

مثال

قارن المتتاليتين (u_n) و (v_n) حيث $u_n=(-1)^n$ و $v_n=\cos n\pi$

4- العمليات على المتتاليات

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ و $(v_n)_{n\in I}$ متتاليتين و k عدد حقيقي

المجموع: $(u_n)_{n\in I}+(v_n)_{n\in I}=(v_n+u_n)_{n\in I}$

الجداء : $(u_n)_{n\in I}\times(v_n)_{n\in I}=(v_n\times u_n)_{n\in I}$

جداء متتالية في عدد حقيقي : $k\times(u_n)_{n\in I}=(k\times u_n)_{n\in I}$

5- تحديد متتالية

تحدد المتتالية اذا علمت حدودها أو الوسيطة التي تمكن من حساب أي حد من حدودها.
و هناك عدة طرق منها على الخصوص:

أ- المتتالية المحددة بالصيغة الصريحة للحد العام.

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$u_n = 2n-6$ و $v_n = a$ حيث a عدد حقيقي و $w_n = \dfrac{(-2)^n}{n+1}$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n\geq 1}$ متتاليات محددة بالصيغة الصريحة

أحسب الحد الثالث لكل من المتتاليات (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n\geq 1}$

ب – المتتالية الترجعية: أي لحساب حد من حدودها نرجع لحدود أخرى

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_n = -2u_{n-1}+3 \quad n\geq 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \quad v_1 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \quad n\geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} w_3 = 1 \\ w_{n+1} = 3w_n - 1 \quad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

(u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n\geq 1}$ متتاليات ترجعية

أحسب $u_1 \;;\; u_2 \;;\; u_3 \;;\; v_2 \;;\; v_3 \;;\; w_2 \;;\; w_0$

II- المتتاليات المحدودة – المتتاليات الرتيبة

1-المتتالية المكبورة – المتتالية المصغورة – المتتالية المحدودة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n\in I \quad u_n \leq M$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة اذا وفقط اذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n\in I \quad u_n \geq m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة اذا وفقط اذا كانت $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة و مصغورة

ملاحظة $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\Leftrightarrow \quad \exists k\in\mathbb{R}_+^* \quad \forall n\in I \quad |u_n|\leq k$

أمثلة

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و (v_n) و $(w_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ :

$u_n = 2n-1$ و $v_n = -3n+5$ و $w_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

بين أن (u_n) مصغور ة و (v_n) مكبورة و $(w_n)_{n\geq 1}$ محدودة.

2- المتتالية الرتيبة

تعريف

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \geq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \succ u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \leq u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية قطعا اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I : $n \succ m$ تستلزم $u_n \prec u_m$

تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تابثة اذا وفقط اذا كان لكل n و m من I لدينا $u_n = u_m$

أمثلة

أدرس رتابة المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) حيث $u_n = 2n-1$ و $v_n = -3n+5$

خاصيات

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية حيث $I=\{n\in\mathbb{N}/n\ge n_0\}$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\ge u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية قطعا $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\succ u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\le u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية تناقصية قطعا $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\prec u_n$

$(u_n)_{n\in I}$ متتالية ثابتة $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}=u_n$

برهان

نبرهن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية $\Leftrightarrow$ $\forall n\in I \quad u_{n+1}\ge u_n$

* $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية ومنه بما أن $n+1\succ n$ لكل n من I فان $u_{n+1}\ge u_n$

* عكسيا ليكن n و m من I حيث $n\succ m$

بما أن $n\succ m$ فانه يوجد $p\in\mathbb{N}^*$ حيث $n=m+p$

$u_{m+p}\ge u_{m+p-1}\ge u_{m+p-2}\ge ....\ge u_{m-1}\ge u_m$ بعد p عملية نحصل على $u_n\ge u_m$

اذن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية تزايدية

تمرين

نعتبر المتتاليات العددية (u_n) و $(v_n)_{n\ge1}$ و $(w_n)_{n\ge1}$ المعرفة بـ :

$u_n=\dfrac{n}{n+1}$ و $v_n=\dfrac{2^n}{n}$ و $\begin{cases} w_1=1 \\ w_{n+1}=\dfrac{1}{2}w_n+1 \end{cases}$

1- أدرس رتابة (u_n) و $(v_n)_{n\ge1}$

2- أ- بين أن $w_n\prec 2$ $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- بين أن $(w_n)_{n\ge1}$ تزايدية .

III- المتتالية الحسابية - المتتالية الهندسية

A- المتتالية الحسابية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\ge n_0}$ حسابية اذا كان يوجد عدد حقيقي r بحيث $\forall n\ge n_0 \quad u_{n+1}=u_n+r$

العدد r يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

نعتبر المتتاليتين (u_n) و $(v_n)_{n\ge1}$ حيث $u_n=-2n+1$ و $v_n=\dfrac{1}{n}$

بين أن (u_n) متتالية حسابية محددا أساسها.

هل $(v_n)_{n\ge1}$ متتالية حسابية؟

2-الخاصية المميزة

لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية حسابية أساسها r ومنه $u_{n+1}=u_n+r$ و $u_n=u_{n-1}+r$

و بالتالي $u_{n+1}+u_{n-1}+r=2u_n+r$ إذن $u_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$

عكسيا $u_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}$ $\forall n\succ n_0$ ومنه $\forall n\succ n_0 \quad u_n-u_{n-1}=u_{n+1}-u_n$ أي

ومنه $u_{n+1}-u_n=u_n-u_{n-1}=u_{n-1}-u_{n-2}=..........=u_1-u_0$ نضع $u_1-u_0=r$

و بالتالي $r=u_{n+1}-u_n \quad \forall n\geq 0$ إذن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r

الخاصية المميزة

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية اذا وفقط اذا كان $u_n=\dfrac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2} \quad \forall n\succ n_0$

3- صيغة الحد العام

$(u_n)_{n\geq n_0}$ حسابية أساسها r

$$\left.\begin{array}{l} u_{n_0+1}=u_{n_0}+r \\ u_{n_0+2}=u_{n_0+1}+r \\ . \qquad\quad . \\ . \qquad\quad . \\ u_{n-1}=u_{n-2}+r \\ u_n=u_{n-1}+r \end{array}\right\}(n-n_0)\,égalités$$

بجمع أطراف المتساويات نجد $u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$

خاصية

اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r \quad \forall n\geq n_0$

ملاحظة - اذا كان (u_n) متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_0+nr \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_1+(n-1)r \quad \forall n\geq 1$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r فان $u_n=u_p+(n-p)r \quad \forall n\geq p\geq n_0$

أمثلة

نعتبر (u_n) متتالية حسابية أساسها3 و حدها الاول $u_0=-2$ حدد الحد العام للمتتالية و أحسب u_{200}

تمرين نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية حيث $u_{100}=256$ و $u_{n+1}=u_n-5 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

أحسب u_1 و u_2

3- مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r

لنحدد $S_n=\underbrace{u_p+u_{p+1}................+u_{n-1}}_{(n-p)termes}$

$$S_n=u_{n-1}+...............u_p+u_{p+1}$$

ومنه $2S_n=(u_p+u_{n-1})+(u_{p+1}+u_{n-2})+.......+(u_{p+k}+u_{n-(k+1)}).........+(u_{n-1}+u_p)$

$$\forall k\in\mathbb{N} \qquad u_{p+k}+u_{n-(k+1)}=u_p+((p+k)-p)r+u_p+((n-(k+1))-p)r$$
$$=u_p+[u_p+((n-1)-p)r]$$
$$=u_p+u_{n-1}$$

ومنه $2S_n=(n-p)(u_p+u_{n-1})$

إذن $S_n=\dfrac{(n-p)(u_p+u_{n-1})}{2}$

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1}...............+u_{n-1}$ فان $S_n = \frac{(n-p)(u_p+u_{n-1})}{2}$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n و u_{n-1} هو الحد الأخير للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1...............+u_{n-1} = \frac{n(u_0+u_{n-1})}{2}$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2...............+u_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2}$$

تمرين

1- أحسب $S_n = 1+2+3....+n$

2- أحسب $S_n = 1+3+5+....+(2n+1)$

3- لتكن (u_n) متتالية حسابية اساسها3 و حدها الأول $u_0 = 5$

أحسب u_n بدلالة n أحسب مجموع 100 حدا أولا للمتتالية

تمرين

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$ بدلالة n. ثم أحسب $S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

B- المتتالية الهندسية

1- تعريف

تكون متتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ هندسية اذا كان يوجد عدد حقيقي q بحيث $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$

العدد q يسمى أساس المتتالية .

أمثلة

(u_n) متتالية حيث $u_n = 3(2)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

بين أن (u_n) متتالية هندسية محددا أساسها

تمرين

نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ و $u_1 = 1$ و $v_n = u_n - 2$

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية محددا أساسها

و

2- الخاصية المميزة

$(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q

* ليكن $n \in \mathbb{N}$ حيث $n \succ n_0$

$n_{n+1} = qu_n$ و $n_n = qu_{n-1}$ ومنه $qn_n^2 = qu_{n-1} \times u_{n+1}$

إذا كان $q \neq 0$ فان $n_n^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$

إذا كان $q = 0$ فان جميع حدود $(u_n)_{n \geq n_0}$ منعدمة حيث $n \succ n_0$ و بالتالي $u_n^{\ 2} = u_{n+1} \cdot u_{n-1} = 0 \quad \forall n \succ n_0$

* عكسيا $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية حيث $u_n^{\ 2} = u_{n+1} \cdot u_{n-1} \quad \forall n \succ n_0$

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية غير منعدمة فان $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \forall n \succ n_0$ ومنه $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \succ n_0}$ متتالية ثابتة

أي يوجد q حيث $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad \forall n \geq n_0$ ومنه $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \geq n_0$

إذن $(u_n)_{n \geq n_0}$ هندسية

اذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ منعدمة فإنها هندسية

تكون متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ هندسية اذا وفقط إذا كان $u_n^{\ 2} = u_{n+1} \cdot u_{n-1} \quad \forall n \succ n_0$

3- صيغة الحد العام

$(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q

$$\left.\begin{array}{l} u_n = qu_{n-1} \\ u_{n-1} = qu_{n-2} \\ . \qquad . \\ . \qquad . \\ . \qquad . \\ u_{n_0+1} = qu_{n_0} \end{array}\right\} (n - n_0)\, égalités$$

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ غير منعدمة فان بضرب أطراف المتساويات و الاختزال نحصل على $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$

إذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ منعدمة فان $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$ محققة

خاصية

اذا كانت $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0} \quad \forall n \geq n_0$

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_0 q^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- اذا كان $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_1 q^{n-1} \quad \forall n \geq 1$
- اذا كان $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q فان $u_n = u_p q^{n-p} \quad \forall n \geq p \geq n_0$

أمثلة

* لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ و حدها الاول $u_0 = 5$

حدد الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n

* لتكن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 و أحد حدودها $u_5 = -2$

حدد الحد العام للمتتالية (v_n) بدلالة n

4- مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

لتكن $(u_n)_{n \geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

نحدد $S_n = u_p + u_{p+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u_{n-1}$

$$qS_n = u_{p+1} + u_{p+2} .... + u_n$$

ومنه $S_n - qS_n = u_p - u_n = u_p - q^{n-p}u_p$ اذن $S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1

اذا كان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1}$ فان $S_n = u_p\left(\frac{1-q^{n-p}}{1-q}\right)$

$n-p$ هو عدد حدود المجموع S_n و u_p هو الحد الأول للمجموع S_n

ملاحظة

- اذا كان (u_n) متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_0 + u_1 .... + u_{n-1} = u_0\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

- اذا كان $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q يخالف 1 فان S_n S_n مجموع n حدا أولا منها هو

$$S_n = u_1 + u_2 .... + u_n = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

حالة خاصة

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها 1 فان $S_n = u_p + u_{p+1} .... + u_{n-1} = u_p(n-p)$

تمرين

أحسب بدلالة n المجموع $S = 2+4+8+16........+2^n$

تمرين

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $u_0 = -3$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 4$ لكل $n\in\mathbb{N}$

نضع $v_n = u_n + 6$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية وحدد أساسها q وحدها الأول v_0
2. احسب v_n ثم u_n بدلالة n
3. نضع $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

احسب S_n بدلالة n

نهايات المتتاليات

I- تعاريف

نعرف نهاية متتالية كما عرفنا نهاية دالة عند $+\infty$

1- تعريف

* $(u_n)_{n\ge n_0}$ تؤول إلى $+\infty$ إذا و فقط إذا كان لكل عدد حقيقي A يوجد عدد صحيح طبيعي N بحيث $u_n \ge A$ لكل $n \ge N$ نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ أو باختصار $\lim u_n = +\infty$

$$\lim u_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad u_n \succ A$$

* $$\lim u_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad u_n \prec -A$$

ملاحظة

$$\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim -u_n = +\infty$$

أمثلة اعتيادية

تذكر أن كل من المتتاليات الآتية تؤول إلى $+\infty$: (n) ، (n^2) ، $(\sqrt{n})$ ، (a^n) حيث $a \succ 1$

أمثلة

$$\lim -n = -\infty \qquad \lim 3n+2 = +\infty \qquad \lim \frac{3^n}{2^n} = \lim\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$$

2- تعريف

$$\lim u_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon \succ 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad |u_n - l| \prec \varepsilon$$

ملاحظة

$$\lim u_n = l \Leftrightarrow \lim(u_n - l) = 0$$

أمثلة اعتيادية

تذكر أن كل من المتتاليات الآتية تؤول إلى 0 : $\left(\frac{1}{n}\right)$ ، $\left(\frac{k}{n}\right)$ ، $\left(\frac{k}{n^2}\right)$ ، (ka^n) حيث $-1 \prec a \prec 1$

أمثلة

$$\lim \frac{1}{10^n} = 0 \qquad \lim \frac{2^n}{3^n} = \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

3- متتالية متقاربة – متتالية متباعدة

تعريف

نقول إن متتالية متقاربة إذا و فقط إذا كانت نهايتها منتهية.
نقول إن متتالية متباعدة إذا وفقط إذا كانت غير متقاربة.

أمثلة

نعتبر $u_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4$ و $v_n = 4^n$ و $w_n = (-1)^n$

(u_n) متقاربة لان $\lim u_n = 4$

(v_n) متباعدة لان $\lim v_n = +\infty$

(w_n) متباعدة لأن (w_n) لا تقبل نهاية

II- مصادق التقارب

مصداق1 لتكن $(u_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية و $(v_n)_{n\ge n_0}$ متتالية عددية متقاربة لأعداد حقيقية موجبة
l عدد حقيقي حيث $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \ge N \quad |u_n - l| \le v_n$.
اذا كان $\lim v_n = 0$ فان $(u_n)_{n\ge n_0}$ متقاربة و $\lim u_n = l$

مصداق2 لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ متتاليتين عدديتين حيث $u_n \leq v_n \quad \forall n\geq N \quad \exists N\in\mathbb{N}$

اذا كان $\lim u_n = +\infty$ فان $\lim v_n = +\infty$

اذا كان $\lim v_n = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

لازمة

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ و $(v_n)_{n\geq n_0}$ و $(w_n)_{n\geq n_0}$ ثلاث متتاليات حيث

$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \forall n\geq N \quad \exists N\in\mathbb{N}$

اذا كان $\lim v_n = \lim w_n = l$ فان $\lim u_n = l$

أمثلة

نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ حدد $\lim u_n$ في الحالات التالية:

أ- $u_n = n^2+n-3$ ب- $u_n = -n^2+n$ ج- $u_n = \dfrac{\sin n}{n}$

أ- لدينا لكل $n\geq 3$ $n^2 \leq n^2+n-3$ و حيث $\lim n^2 = +\infty$ ومنه $\lim u_n = +\infty$

ب- لدينا لكل $n\geq 2$ $1-\dfrac{n}{2}\leq 0$ ومنه $1-n \leq -\dfrac{n}{2}$ و بالتالي $n-n^2 \leq -\dfrac{n^2}{2}$

وحيث $\lim -\dfrac{n^2}{2} = -\infty$ فان $\lim u_n = -\infty$

ج- لدينا لكل $n\geq 1$ $\left|\dfrac{\sin n}{n}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ و حيث $\lim \dfrac{1}{n} = 0$ فان $\lim u_n = 0$

تمرين

نعتبر $(u_n)_{n\geq 1}$ حيث $u_n = 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+......+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$

بين أن $u_n \geq \sqrt{n}$ و استنتج $\lim u_n$

تمرين

نعتبر المتتالية (u_n) حيث $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{n+1} \end{cases}$

1- بين أن $0 \leq \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \prec \dfrac{1}{2} \quad \forall n\geq 10$

2- حدد $\lim u_n$

IV- نهاية المتتالية الهندسية q^n

الحالة1: $q \succ 1$

يوجد عدد حقيقي موجب قطعا a حيث $q = 1+a$ نعلم أن $(1+a)^n \geq 1+na$ ومنه $q^n \geq 1+na$

وحيث $\lim 1+na = +\infty$ فان $\lim q^n = +\infty$

الحالة2 $q = 1$ لدينا $\lim q^n = 1$

الحالة3 $-1 \prec q \prec 1$

$|q| \prec 1$ ومنه $\dfrac{1}{|q|} \succ 1$ و منه $\lim \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$ و بالتالي $\lim \dfrac{1}{|q|^n} = \lim\left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$ و بالتالي $\lim |q^n| = 0$

إذن $\lim q^n = 0$

الحالة4 $q \le -1$

(q^n) ليست لها نهاية

خاصية

اذا كان $q \succ 1$ فان $\lim q^n = +\infty$

اذا كان $q = 1$ فان $\lim q^n = 1$

اذا كان $-1 \prec q \prec 1$ فان $\lim q^n = 0$

اذا كان $q \le -1$ فان (q^n) ليست لها نهاية

ملاحظة

*- المتتالية (q^n) متقاربة اذا كان $-1 \prec q \le 1$

*- ليكن $r \in \mathbb{Q}^*$

إذا كان $r \succ 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = +\infty$

إذا كان $r \prec 0$ فان $\lim\limits_{+\infty} n^r = 0$

أمثلة

حدد $\lim \left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)^n$ و $\lim \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$

V- خاصيات

خاصية

كل متتالية متقاربة و موجبة تكون نهايتها موجبة

خاصية

اذا كان (u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين نهايتها l و l' بحيث $u_n \le v_n$ لكل $n \ge N$ فان $l \le l'$

مبرهنة

كل متتالية تزايدية و مكبورة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و مصغورة هي متتالية متقاربة

ملاحظة كل متتالية تزايدية و سالبة هي متتالية متقاربة
كل متتالية تناقصية و موجبة هي متتالية متقاربة

تمرين

نعتبر $(u_n)_{n\ge1}$ متتالية معرفة بـ $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2}$

1- بين أن $(u_n)_{n\ge1}$ تزايدية

2- بين أن $\frac{1}{k^2} \prec \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ثم بين أن $u_n \prec 2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3- استنتج أن $(u_n)_{n\ge1}$ متقاربة.

VI- العمليات على نهايات المتتاليات المتقاربة

1- مبرهنة

(u_n) و (v_n) متتاليتين متقاربتين و α عدد حقيقي

$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$ $\quad$ $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$ $\quad$ $\lim(\alpha u_n) = \alpha \lim u_n$

إذا كان $\lim v_n \ne 0$ فان $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n}$

2- توسيع العمليات على النهايات

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n+v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n \times v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+$	$-\infty$	$-\infty$
$l \succ 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l \succ 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l \prec 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l \prec 0$	$-\infty$	$+\infty$
$\pm\infty$	0	شكل غير محدد

$\lim u_n$	$\lim \frac{1}{u_n}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0^+	$+\infty$
0^-	$-\infty$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{1}{u_n} \times \lim u_n$$

تمرين

حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2-3n+2}{n^2-1}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+n-1}}{\sqrt[3]{n^2 2n-4}}$

V- متتاليات من نوع $f(u_n)$

نشاط

نعتبر (u_n) متتالية حيث $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n} \end{cases}$

1- بين أن $2 \le u_n \le \frac{7}{2}$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

2- لتكن $v_n = 1 - \frac{4}{u_n+1}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية ب- حدد $\lim v_n$ استنتج $\lim u_n$

3- لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+^*$ حيث $f(x) = \frac{2x+3}{x}$

أ- أنشئ (C_f) ب- تأكد أن f متصلة على $\left[2;\frac{2}{7}\right]$

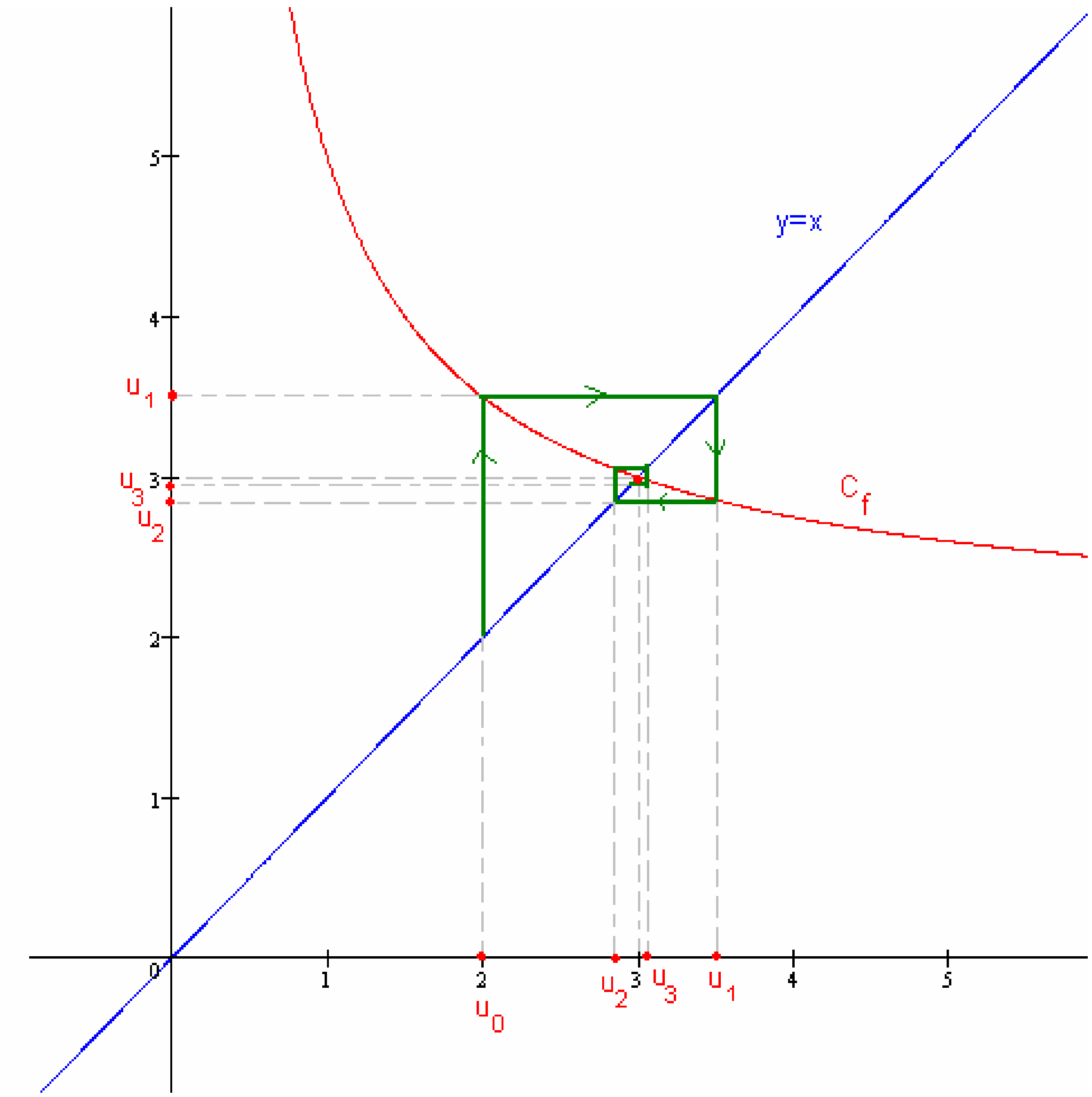
ج- بين أن $f\left(\left[2;\frac{2}{7}\right]\right) \subset \left[2;\frac{2}{7}\right]$ د- حل المعادلة $f(x) = x$

ماذا تلاحظ؟ ماذا تستنتج؟

$u_1 = f(u_0)$ ، $u_2 = f(u_1)$ ، $u_3 = f(u_2)$ ....

من خلال التمثيل المبياني يتضح أن نهاية المتتالية سيكون تقاطع المستقيم $(\Delta): y = x$ و المنحنى (C_f)

أي حل المعادلة $f(x) = x$ $\qquad \lim u_n = 3$



خاصية

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بالعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ بحيث يوجد مجال I ضمن D_f و N من $\mathbb{N}$
حيث $u_n \in I \quad \forall n \geq N$ و f متصلة على I و $f(I) \subset I$.
اذا كانت (u_n) متتالية متقاربة فان نهايتها هي حل للمعادلة $f(l) = l$

تمرين

نعتبر (u_n) متتالية حيث $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1-u_n)$ و $u_0 = \frac{1}{2}$

بين أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها