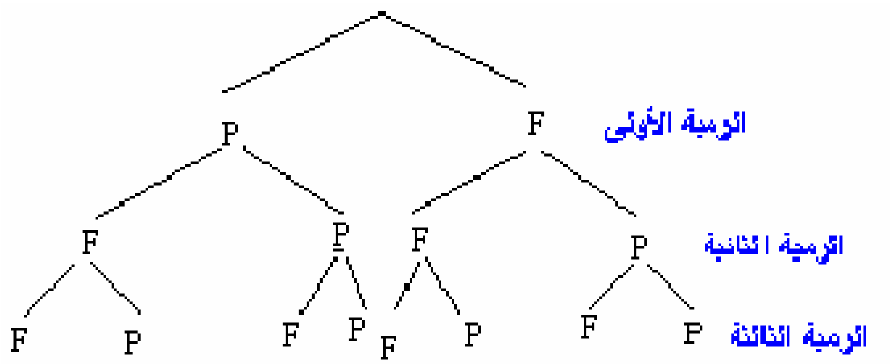
التعداد

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

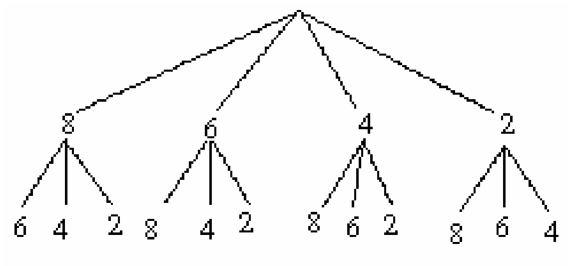
I- مبدأ الجداء Principe du produit

1- أنشطة تمهيدية

نشاط1 نرمي قطعة نقود ثلاثة مرات متتالية (لقطعة النقود وجهان P الظهر (pile) و F الوجه (face))
لنحدد عدد النتائج الممكنة
عند رمينا للقطعة النقود ثلاث مرات متتالية , تكون لرمية الأولى نتيجتين مختلفتين و لكل نتيجة لرمية الأولى نتيجتان لرمية الثانية و لكل نتيجة لرمية الثانية نتيجتان لرمية الثالثة.
اذن سيكون عدد نتائج بعد الرمية الثالثة هو $2\times2\times2=8$
هذه التجربة يمكن تمثيلها في التمثيل التالي يسمى شجرة الإمكانيات



نشاط2 من بين الأرقام 2 و 4 و 6 و 8 نريد تكوين أعداد من رقمين مختلفين
حدد عدد الأعداد الممكنة
من بين الأرقام 2 و 4 و 6 و 8 يمكن اختيار رقم العشرات بأربع كيفيات مختلفة و لكل رقم عشرات يمكن اختيار رقم الوحدات بثلاث كيفيات مختلفة .
اذن عدد الأعداد الممكنة هو $4\times3=12$



شجرة الإمكانيات

نشاط3 نرمي نردا مرتين متتاليتين .
حدد عدد النتائج الممكنة
عدد النتائج الممكنة هو $6\times6=36$
حدد عدد النتائج الممكنة بحيث في الرمية الأولى نحصل على عدد زوجي في الرمية الأولى
عدد النتائج الممكنة هو $(3\times6=18)$

2- المبدأ

نعتبر p اختيار
إذا كان الاختيار الأول يتم ب n_1 كيفية مختلفة و الاختيار الثاني يتم ب n_2 كيفية مختلفة ....و كان الاختيار p يتم بـ n_p كيفية مختلفة فان عدد الكيفيات التي يتم بها هده الاختيارات كلها هو $n_1\times n_2\times..........\times n_p$

تمرين
يحتوي كيس على 5 كرات حمراء و 2 خضراء و نسحب بالتتابع و بإحلال ثلاث كرات
1- حدد عدد السحبات الممكنة.
2- حدد عدد السحبات التي تكون فيها الكرة الأولى خضراء و الثانية و الثالثة حمراء.

تمرين

يحتوي صندوق على 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء نسحب من الصندوق ثلاث كرات بالتتابع بحيث إذا كانت خضراء نعيدها و إذا كانت حمراء لا نعيدها

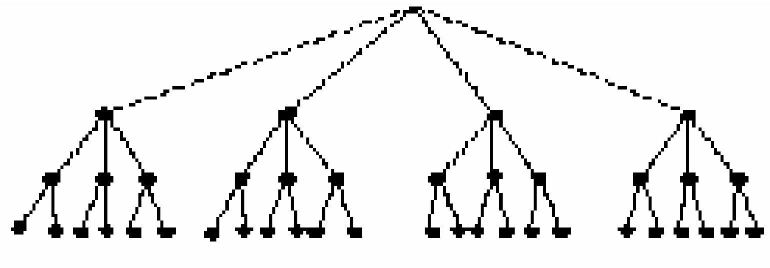
1- ما هو عدد السحبات التي تكون فيها الكرة الأولى خضراء و الثانية حمراء.

2- ما هو عدد السحبات التي تكون فيها الكرة الأولى خضراء.

3- ما هو عدد السحبات التي تكون فيها الكرة الأولى و الثانية حمراويتين.

II-الترتيبات Les arrangements

1- أنشطة نريد أن نكون صفوفا من 3 تلاميذ نختارهم من بين 4 تلاميذ (أي ترتيب 3 تلاميذ من بين 4) نحدد عدد الصفوف الممكنة



عدد الصفوف الممكنة هو $4\times3\times2$ (يلاحظ أن الترتيب جد مهم)

2- تعريف

كل ترتيب لـ p عنصر من بين n عنصر يسمى ترتيبة لـ p عنصر من بين n $(p\leq n)$

أمثلة

* كل صف (نشاط أعلاه) يمثل ترتيبة لـ 3 عناصر من بين 4

* كل رقم مكون من p رقم و أرقامه مختلفة مثنى مثنى من بين n رقم $(p\leq n)$ هو ترتيبة لـ p عنصر من بين n .

* كل مثلوث عناصره مختلفة مثنى مثنى و تنتمي إلى مجموعة تحتوي على n عنصر $(3\leq n)$ هو ترتيبة لـ 3 عناصر من بين n .

* عندما نسحب كرة بتتابع و بدون الحلال (أي نسحب الكرة ولا نعيدها و نسحب الكرة الموالية) من كيس يحتوي على n كرة $(p\leq n)$ فان كل نتيجة هي ترتيبة لـ p عنصر من بين n.

3- عدد الترتيبات و الرمز A_n^p

مبرهنة

عدد الترتيبات لـ p عنصر من بين n $(1\leq p\leq n)$ هو العدد $n(n-1)(n-2)................(n-p+1)$

نرمز له بـ A_n^p نكتب $A_n^p=n(n-1)(n-2).............(n-p+1)$

ملاحظة عدد عوامل الجداء A_n^p هو p.

البرهان لتكن $E=\{x_1;x_2;...........;x_n\}$ $(cardE=n)$

كل ترتيبة لـ p عنصر من بين n هو اختيار p عنصر من بين عناصر E بالترتيب .

لاختيار العنصر الأول لدينا n كيفية مختلفة .

لاختيار العنصر الثاني لدينا $n-1$ كيفية مختلفة .

لاختيار العنصر الثالث لدينا $n-2$ كيفية مختلفة .

....

....

لاختيار العنصر p لدينا $n-p+1$ كيفية مختلفة .

اذن عدد إمكانيات اختيار p عنصر من بين عناصر E هو $n(n-1)(n-2)................(n-p+1)$

ومنه عدد الترتيبات لـ p عنصر من بين n هو $A_n^p=n(n-1)(n-2).............(n-p+1)$

ملاحظة $A_n^1=n$

تمرين1 أحسب A_5^3 ; A_7^4 ; A_5^5

تمرين2 يحتوي كيس على 7 كرات نسحب من الكيس 3 كرات بالتتابع و بدون إحلال حدد عدد السحبات

الممكنة
(بما أن السحب بالتتابع و بدون إحلال فان كل سحبة ممكنة ترتيبة لـ 3 عناصر من بين 7
اذن عدد السحبات A_7^3)

تمرين3

كم عدد ممكن مكون من 4 أرقام مختلفة مثنى مثنى يمكن تكوينه من الأرقام $2 \;;\; 3 \;;\; 5 \;;\; 7 \;;\; 9$

4- التبديلات Les permutations

أ- تعريف

كل ترتيبة لـ n عنصرمن بين n تسمى تبديلة لـ n عنصر

أمثلة

* عندما نسحب n كرة بالتتابع و بدون إحلال من كيس يحتوي على n كرة فان كل سحبة ممكنة هي تبديلة لـ n عنصر.

* كل تطبيق تقابلي من $E=\{1;2;.......;n\}$ نحو مجموعة تحتوي على n هو تبديلة لـ n عنصر.

ب- عدد تبديلات و الرمز $n!$

مبرهنة

عدد تبديلات لـ n عنصر هو $A_n^n = n(n-1)(n-2)...........\times 2\times 1$ نرمز له بـ $n!$

$$n! = n(n-1)(n-2)........2\times 1$$

العدد $n!$ يقرأ " عاملي n" (factoriel n)

اصطلاح $0!=1$

تمرين أحسب $5!$ $\quad \dfrac{4!3!}{6!}$ $\quad \dfrac{7!4!}{3!5!}$ $\quad \dfrac{n!}{(n-2)!}$

تمرين

شارك ثمانية عدائين في سباق 100 م في مدار مكون من 8 ممرات . ما هي عدد الوضعيات الممكنة عند الانطلاقة .

III- التأليفات

1- أنشطة *1- نعتبر $E=\{a;b;c;d\}$ حدد جميع أجزاء E التي تحتوي على 3 عناصر.

*2- يحتوي كيس على 5 كرات نسحب كرتين من الكيس دفعة واحدة . حدد عدد السحبات الممكنة.

2- تعريف

ليكن E مجموعة تحتوي على n عنصر.
كل جزء من E يحتوي على p $(p \le n)$ يسمى تأليفة لـ p عنصر من بين n

أمثلة

* عندما نسحب تانيا (أي في نفس الوقت) p كرة من كيس يحتوي على n كرة $(p \le n)$ فان كل سحبة تسمى تأليفة لـ p عنصر من بين n .

* عندما نختار p عنصر من بين n $(p \le n)$ بحيث لا نهتم بترتيب العناصر المختارة فان كل اختيار هو تأليفة لـ p عنصر من بين n.

3- عدد التأليفات و الرمز C_n^p

مبرهنة

عدد التأليفات لـp عنصر من بين n $(p \le n)$ هو العدد $\dfrac{A_n^p}{p!}$ و الدي يرمز له بـ C_n^p

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)(n-2)............(n-p+1)}{p(p-1)..........................\times 2\times 1}$$

البرهان

لتكن $E=\{x_1;x_2;..........;x_n\}$ $(cardE=n)$. نعتبر F جزء من E يحتوي على p عنصر
F تأليفة لـ p عنصر من بين n

عدد الترتيبات من p التي يمكن تكوينها بعناصر F هو $p!$

ليكن x عدد تأليفات لـ p عنصر من بين n (أي عدد أجزاء E التي تحتوي على p عنصر)

و منه عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها لـ p عنصر من بين n عنصر من E هي $(p!)\times x$ و نعلم أن عدد هذه الترتيبات هو A_n^p

و منه $A_n^p = (p!)\times x$ و بالتالي $x=\dfrac{A_n^p}{p!}$ إذن $C_n^p=\dfrac{A_n^p}{p!}$

تمرين1 1- أحسب $C_5^1 \; ; \; C_4^4 \; ; \; C_{11}^8$

2- أ- حدد n حيث $C_n^2=6$ ب- حدد n حيث $A_n^2=12$

تمرين2 بكم من كيفية يتم اختيار 3 تلاميد تانيا من بين 15 تلميد لتمثيلهم في إحدى الاجتماعات .

تمرين3 يحتوي صندوق على 5 كرات حمراء و 3 بيضاء , نسحب في آن واحد 3 كرات من الصندوق.

1- ما هو عدد السحبات الممكنة .

2- ما هو عدد السحبات التي تحتوي على كرة حمراء فقط.

3- ما هو عدد السحبات التي تحتوي على كرتين حمراويتين فقط.

3- خاصيات

ليكن n و p من $\mathbb{N}$ بحيث $(p\le n)$

$$C_n^p=C_n^{n-p} \quad ; \quad C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!} \quad ; \quad A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

$$(1\le p\le n) \qquad C_n^{p-1}+C_n^p=C_{n+1}^p$$

ملاحظة $C_n^n=1$ $\qquad C_n^1=n$

تمرين أحسب $C_0^0 \; ; \; C_{10}^3 \; ; \; C_{10}^7 \; ; \; C_9^4 \; ; \; C_8^3+C_8^4$

4- مثلث باسكال

نعتبر الأعداد C_n^p عندما تتغير n و p $(p\le n)$

إذا كان $n=0$ فان $p=0$ و لدينا $C_0^0=1$

إذا كان $n=1$ فان $p=0$ أو $p=1$ و لدينا $C_1^1=1 \; ; \; C_1^0=1$

إذا كان $n=2$ فان $p=0$ أو $p=1$ أو $p=2$ و لدينا $C_2^2=1 \; ; \; C_2^1=2 \; ; \; C_2^0=1$

....

....

إذا كان $n=k$ فان $p=0$ أو $p=1$ أو $p=2$ ......أو $p=k$

و لدينا $C_k^0=1 \; ; \; C_k^1=k$ ....$C_k^k=1$

n \ p	0	1	2	3	4	....
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
.	....					
.						

في هذا الشكل كتبت الأعداد C_n^p داخل جدول مثلث باسكال

مثلا C_4^3 يوجد في تقاطع السطر 4 و العمود 3

ملاحظة - في العمود 0 جميع الأعداد تساوي 1 لأن $C_n^0=1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- في اخر السطور جميع الأعداد تساوي 1 لأن $C_n^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- كل حد داخل المثلث هو مجموع الحد الذي فوقه والحد الذي يوجد على يسار هذا الأخير لأن
$C_{n+1}^p = C_n^p + C_n^{p-1}$

3- صيغة الحدانية

مبرهنة

$$\forall (a;b) \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

مثال أحسب $(2x+1)^4$

تطبيق نعتبر E مجموعة تحتوي على n عنصر عدد الأجزاء الفارغة من E هو $C_n^0 = 1$

عدد الأحاديات من E هو $C_n^1 = n$ ...... عدد أجزاء E من p عنصر هو C_n^p

عدد أجزاء E هو $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$

خاصية

عدد أجزاء مجموعة تحتوي على n عن عنصر هو 2^n