الدالة الأسية

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

I- الدالة الأسية النيبيرية

1- تعاريف و خاصيات أولية

نعلم أن دالة $\ln$ تقابل من $]0;+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و بالتالي تقبل دالة عكسية من $\mathbb{R}$ نحو $]0;+\infty[$

أ- تعريف

الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النيبيري تسمى الدالة الأسية النيبيرية نرمز لها (مؤقتا) بالرمز $\exp$

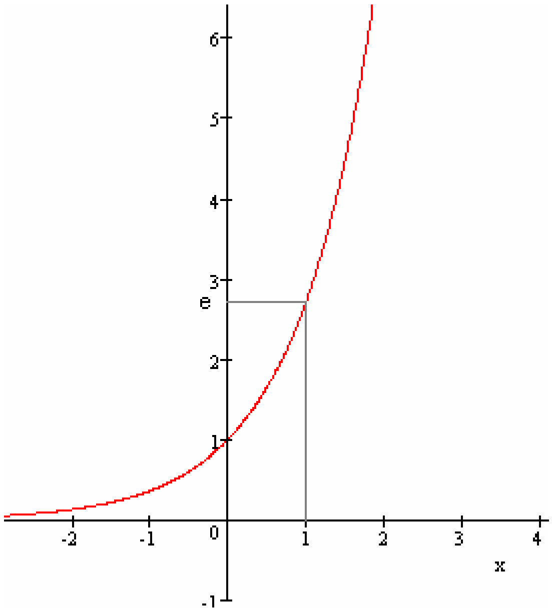
$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \forall y\in\,]0;+\infty[\qquad \exp(x)=y \Leftrightarrow \ln y=x$$

ب- خاصيات أولية

* $\exp(0)=1 \qquad \exp(1)=e$
* $\exp(x)\succ 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
* $\ln(\exp(x))=x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$
* $\exp(\ln(x))=x \qquad \forall x\in\,]0;+\infty[$
* الدالة $\exp$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
* $\exp(a)=\exp(b)\Leftrightarrow a=b \qquad \forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$
* $\exp(a)\succ\exp(b)\Leftrightarrow a\succ b \qquad \forall(a;b)\in\mathbb{R}^2$

2- التمثيل المبياني لدالة exp

في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $\ln$ و منحنى الدالة $\exp$ متماثلان بالنسبة للمنصف الأول



3- خاصية أساسية

$$\forall(a;b)\in\mathbb{R}^2\qquad \exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$$

البرهان

$$\ln(\exp(a)\times\exp(b))=\ln\exp(a)+\ln\exp(b)=a+b$$
$$\ln\exp(a+b)=a+b$$
$$\ln(\exp(a)\times\exp(b))=\ln\exp(a+b)$$
$$\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$$

نـــــتائج

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall r\in\mathbb{Q} \qquad \exp(-a)=\frac{1}{\exp(a)}$$

$$\exp(a-b)=\frac{\exp(a)}{\exp(b)} \qquad \exp(ra)=\left[\exp(a)\right]^r$$

4- كتابة جديدة لدالة exp

نعلم أن $\exp(1)=e$ و بالتالي $\forall r\in\mathbb{Q} \quad \exp(r)=\left[\exp(1)\right]^r=e^r$

نمدد هده الكتابة إلى $\mathbb{R}$ أي $\forall x\in\mathbb{R} \quad \exp(x)=e^x$

الخاصيات السابقة تصبح

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \forall y\in]0;+\infty[\qquad e^x=y \Leftrightarrow x=\ln y$$

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \ln e^x = x \qquad \forall x\in]0;+\infty[\quad e^{\ln x}=x$$

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad \forall r\in\mathbb{Q} \quad e^{a+b}=e^a.e^b \qquad e^{-a}=\frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b}=\frac{e^a}{e^b} \qquad e^{rb}=\left(e^a\right)^r$$

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$$

$$\forall (a;b)\in\mathbb{R}^2 \quad e^a=e^b \Leftrightarrow \quad a\succ b$$

تمرين

1- حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $e^{x-2}=2 \quad ; \quad e^{2x}-3e^x+2=0$

2- حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين $e^{x^2-x}\succ 1 \quad ; \quad e^{3x+1}-2e^{2x+1}+e^{x+1}\prec 0$

5- مشتقة الدالة الأسية النبيرية

أ- بما أن دالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و مشتقتها لا تنعدم على $]0;+\infty[$ فان الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \left(e^x\right)'=\frac{1}{\ln'\left(e^x\right)}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$$

خاصية

الدالة $x\to e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R} \qquad \left(e^x\right)'=e^x$

ب- خاصية

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدالة $x\to e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

$$\forall x\in I \qquad \left[e^{u(x)}\right]'=u'(x)e^{u(x)}$$

تمرين

حدد الدالة المشتقة للدالة f في الحالتين التاليتين

a) $f(x)=e^{3x^2-x}$ $\qquad$ b) $f(x)=e^{x-x\ln x}$

6- نهايات هامة

$$\lim_{x\to-\infty} e^x=0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

نبين $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$

نضع $t=e^x$ ومنه $x=\ln t$

وحيث أن $\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0^+$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{\ln t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln t}{t}}=+\infty$

تمرين حدد $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}$ $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

تمرين أدرس و مثل مبيانيا الدالتين f و g حيث $f(x)=\frac{e^x}{x}$ $g(x)=\frac{e^x-1}{e^x}$

II- الدالة الأسية للأساس a

1- تعريف

ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد1
الدالة العكسية للدالة Log_a تسمى الدالة الأسية للأساس a و يرمز لها بالرمز $\exp_a$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad \exp_a(x)=y\Leftrightarrow Log_a(y)=x$$

ملاحظة

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad\forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad \exp_a(x)=y\Leftrightarrow Log_a(y)=x\Leftrightarrow x=\frac{\ln y}{\ln a}\Leftrightarrow \ln y=x\ln a\Leftrightarrow y=e^{x\ln a}$$

اذن $\forall x\in\mathbb{R}\qquad \exp_a(x)=e^{x\ln a}$

(هذا يعني أن دالة $\exp_a$ هي تركيب الدالة الخطية $x\to x\ln a$ و الدالة الأسية النبييرية)

2- خاصيات

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad\forall r\in\mathbb{Q}\quad \exp_a(x+y)=\exp_a(x)\times\exp_a(y)\qquad \exp_a(-x)=\frac{1}{\exp_a(x)}$$

$$\exp_a(x-y)=\frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}\qquad \exp_a(rx)=\left(\exp_a(x)\right)^r$$

3- كتابة أخرى للعدد $\exp_a$

$$\forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\quad \exp_a(1)=a\qquad (Log_a(a)=1)$$

$$\forall r\in\mathbb{R}\quad\forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\qquad \exp_a(r)=\left[\exp_a(1)\right]^r=a^r$$

نمدد هذه الكتابة الى $\mathbb{R}$ فنكتب $\exp_a(x)=a^x \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad\forall y\in\left]0;+\infty\right[\qquad a^x=y\Leftrightarrow x=Log_a(y)$$

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad\forall a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}\qquad a^x=e^{x\ln a}$$

دراسة الدالة $x\to a^x$

ليكن $a\in\mathbb{R}^{+*}-\{1\}$

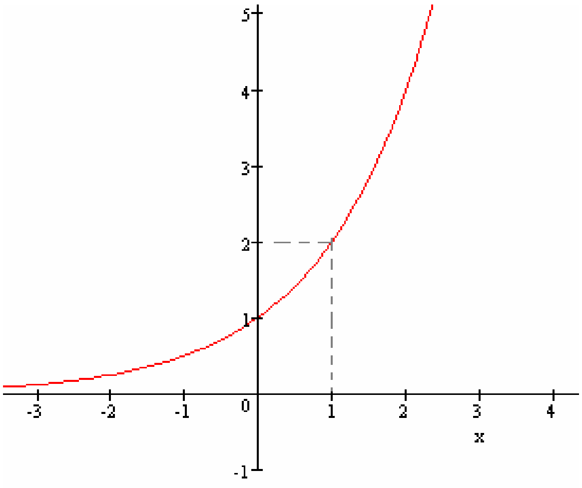
* الدالة $x\to a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x\in\mathbb{R}\qquad (a^x)'=a^x\ln a$

الحالة1 اذا كان $a\succ 1$ فان $\ln a\succ 0$ ومنه الدالة $x\to a^x$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$
و $\lim_{x\to+\infty}a^x=+\infty$ $\lim_{x\to-\infty}a^x=0$

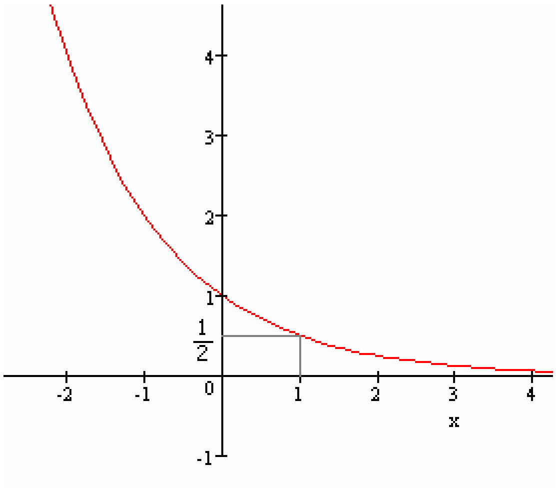
الحالة2 اذا كان $0\prec a\prec 1$ فان $\ln a\prec 0$ ومنه الدالة $x\to a^x$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$
و $\lim_{x\to+\infty}a^x=0$ $\lim_{x\to-\infty}a^x=+\infty$

التمثيل المبياني

$a \succ 1 \qquad (a=2)$



$0 \prec a \prec 1 \qquad \left(a=\frac{1}{2}\right)$



<u>ملاحظة</u> نلاحظ $1^x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ و بالتالي نكتب $a^x = e^{x\ln a} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^{+*}$