

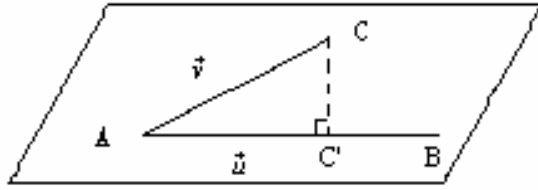
الجداء السلمي و تطبيقاته

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

I-الجداء السلمي

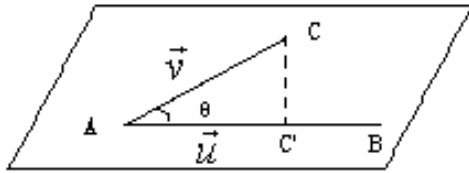
1- تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء V_3 و A نقطة من الفضاء E .
توجد نقطتان B و C من الفضاء حيث $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{AC}$ الجداء السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} هو العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{v}$ المعروف كما يلي
* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}$ حيث C' المسقط العمودي لـ C على (AB)
* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



2- صيغة أخرى للجداء السلمي

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و A و B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{AC}$ و θ قياس الزاوية $[\widehat{BAC}]$ و C' المسقط العمودي لـ C على (AB)



لدينا $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AC'}$

* إذا كان $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ فان $\overline{AC'} = \overline{AC} \cos \theta$

ومنه $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \times \overline{AC} \cos \theta = AB \times AC \cos \theta$

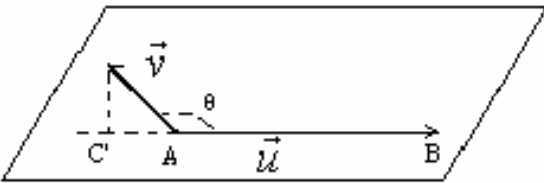
* إذا كان $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ فان

$\overline{AC'} = \overline{AC} \cos(\pi - \theta) = -\overline{AC} \cos \theta$

ومنه $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overline{AB} \times \overline{AC} \cos \theta = AB \times AC \cos \theta$

* إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2}$ فان $\overline{AC'} = 0$ ومنه $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

إذن $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \cos \theta$



خاصية

إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين من الفضاء V_3 و A و B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث $\vec{u} = \overline{AB}$

و $\vec{v} = \overline{AC}$ و θ قياس الزاوية $[\widehat{BAC}]$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \cos \theta$

مثال

المكعب ABCDEFGH الذي طول حرفه a

لدينا $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \times \overline{AB} = AB^2 = a^2$

و $\overline{AB} \cdot \overline{AH} = \overline{AB} \times \overline{AA} = 0$

$\overline{AF} \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \times \overline{AI} = \frac{AC^2}{2} = \frac{(a\sqrt{2})^2}{2} = a^2$

3- خصائص

أ- تعامد متجهتين :

تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء V_3 .
تكون \vec{u} و \vec{v} متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ نكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$

ملاحظة المتجهة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة من الفضاء V_3

ب- منظم متجهة

لتكن \vec{u} متجهة غير منعدمة و A و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u} = \overline{AB}$ ومنه $\vec{u} \cdot \vec{u} = AB^2$

إذن لكل متجهة غير منعدمة \vec{u} $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$
العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ يسمى المربع السلمي لـ \vec{u} و يكتب \vec{u}^2
العدد $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة \vec{u} و يكتب $\|\vec{u}\|$

ملاحظة * $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$

* إذا كانت \vec{u} و \vec{v} متجهتين غير منعدمتين وكان θ قياس الزاوية $[\widehat{BAC}]$ حيث $\vec{u} = \overline{AB}$ و $\vec{v} = \overline{AC}$

فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta$

ج- خصائص

متطابقات هامة $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in V_3^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

* $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$ * $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

* $\vec{u} \cdot \alpha \vec{v} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$

II- صيغ تحليلية

1- الأساس و المعلم المتعامدان الممنظمان

تعريف

لتكن \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلاث متجهات غير مستوائية من الفضاء V_3 و O نقطة من الفضاء.

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ أساس للفضاء V_3

يكون الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد (أو المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} متعامدة متنى متنى.

يكون الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد و ممنظم (أو المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد و ممنظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات

\vec{i} و \vec{j} و \vec{k} متعامدة متنى متنى و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

2- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

أ- خاصة

الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

ملاحظة إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ بالنسبة للمعلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ فان $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$; $\vec{u} \cdot \vec{j} = y$; $\vec{u} \cdot \vec{k} = z$

ب- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة بين نقطتين

*- إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ بالنسبة للمعلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ فان $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

*- إذا كانت $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ بالنسبة للمعلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

فان $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

تمارين

- 1- حدد متجهة \vec{w} واحدة وعمودية على $\vec{u}(-1;1;1)$ و $\vec{v}(1;-2;0)$
2- حدد متجهة \vec{w} عمودية على $\vec{u}(1;1;0)$ و $\vec{v}(0;2;1)$ و $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$

تمارين

نعتبر $A(1;1;\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$ و $C(-1;-1;-\sqrt{2})$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

III- تطبيقات الجداء السلمي في V_3

1- تعامد المستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- تعامد مستقيمين

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمين من الفضاء موجهين بالمتجهتين \vec{u}_1 و \vec{u}_2 على التوالي

$$(D_1) \perp (D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

ب- تعامد مستقيم و مستوى

خاصية

ليكن (P) مستوى موجه بالمتجهتين \vec{u}_1 و \vec{u}_2 و (D) مستقيم موجه بالمتجهة \vec{u}_3

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_3 \text{ و } \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$$

ج- ملاحظات واصطلاحات

- * المتجهة \vec{u} الموجهة لمستقيم (D) العمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منظمية للمستوى (P) .
- * إذا كانت \vec{u} منظمية لمستوى (P) فإن كل متجهة \vec{v} مستقيمة مع \vec{u} تكون منظمية للمستوى (P)
- * إذا كانت \vec{u} منظمية لمستوى (P) و \vec{v} منظمية لمستوى (P') وكانتا \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فإن (P) و (P') متوازيان

* إذا كان $(A;B) \in (P)^2$ و \vec{u} منظمية لمستوى (P) فإن $\vec{u} \perp \overline{AB}$

تمارين في الفضاء المنسوب إلى معلم م.م. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(-1; 2; 0)$ و العمودي على المستوى (P) الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(1;-1;1)$ و $\vec{v}(2;1;1)$

تمارين

في الفضاء المنسوب إلى معلم م.م. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر المستوى

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

(P) الذي معادلته $ax-2y+z-2=0$ و المستقيم (D) تمثله بارامتري

1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)

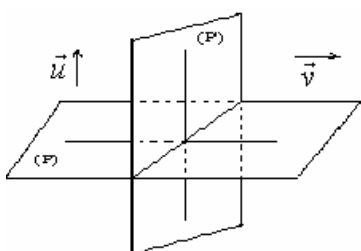
2- حدد a و b لكي يكون $(D) \perp (P)$

د- تعامد مستويين

تذكير يكون مستويان متعامدين اذا و فقط اذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

خاصية

ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء و \vec{u} و \vec{v} متجهتين منظمتين لهما على التوالي $\vec{u} \perp \vec{v}$ اذا و فقط اذا كان $(P') \perp (P)$



3- معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

a. مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

مبرهنة

تكن \vec{u} متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء
* المستوى المار من A و المتجهة \vec{u} منظمة له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$
* مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ المستوى المار من A و المتجهة \vec{u} منظمة له

b. معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

خاصية

* كل مستوى (P) في الفضاء و $\vec{u}(a;b;c)$ منظمة عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع $ax + by + cz + d = 0$
* كل معادلة ديكارتية من نوع $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث $\vec{u}(a;b;c)$ منظمة عليه

تمرين

$$(D): \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \quad (P) : 2x-y+3z+1=0 \quad \text{نعتبر}$$

- 1- حدد متجهة \vec{u} منظمة على (P) ونقطة منه.
- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و $\vec{n}(1,2,1)$ منظمة عليه.
- 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A' (2;0;3) والعمودي على (D)
- 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و الموازي لـ (P)

دراسة الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

أ- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

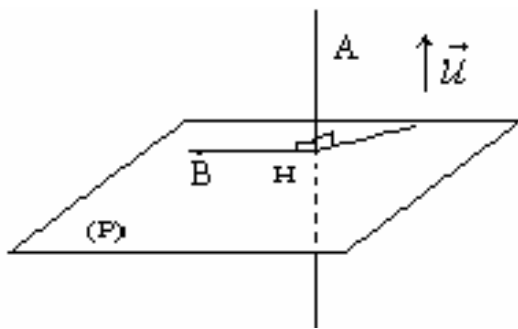
- (P) المستوى المار من A و \vec{u} منظمة عليه (P') المستوى المار من A' و \vec{v} منظمة عليه
- الحالة 1 \vec{u} و \vec{v} مستقيمتان
إذا كان (P') $A \in (P)$ أو $A' \in (P)$ فان $(P') = (P)$
إذا كان (P') $A \notin (P)$ و $A' \notin (P)$ فان (P) و (P') متوازيان قطعاً.
- الحالة 2 \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين
- إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$ فان $(P') \perp (P)$
- إذا كان \vec{u} و \vec{v} غير متعامدين فان (P) و (P') متقاطعان.

ب- الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

- (P) المستوى المار من A و \vec{u} منظمة عليه (D) المستقيم المار من A' و \vec{v} موجهة له
- الحالة 1 إذا كان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فان $(D) \perp (P)$
الحالة 2 \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين
- إذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$ فان (P) و (D) متوازيان
- إذا كان $\vec{u} \not\perp \vec{v}$ فان (D) يخترق (P)

IV مسافة نقطة عن مستوى

1- تعريف و خاصية



الفضاء منسوب إلى معلم م.م. $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
مسافة نقطة A عن مستوى (P) هي المسافة AH
حيث H المسقط العمودي لـ A على (P) نكتب

$$d(A; (P)) = AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

حيث $B \in (P)$ و \vec{u} منظمة على (P)

2- خاصة

ليكن (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و $A(x_0; y_0; z_0)$ نقطة من الفضاء

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال

ليكن (P) مستوى مار من $B(2; 1; 3)$ و $\vec{u}(1; -1; \sqrt{2})$ منظمية عليه لتكن $A(1; 2; 0)$
حدد $d(A; (P))$

تمرين 1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
نعتبر $A(1; -1; 1)$ و $B(3; 1; -1)$ و (P) المستوى ذا المعادلة $2x - 3y + 2z = 0$ و (D) المستقيم الممثل

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{بارا متريا بـ}$$

- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)
- 2- أحسب $d(A; (P))$ و $d(A; (D))$
- 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين 2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.
نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $3x + 2y - z - 5 = 0$ و (D) المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- 1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)