المتغير العشوائي

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

I- المتغيرالعشوائي

1- نشاط تمهيدي

نعتبر اللعبة : يرمي اللاعب قطعة نقود مرتين متتاليتين

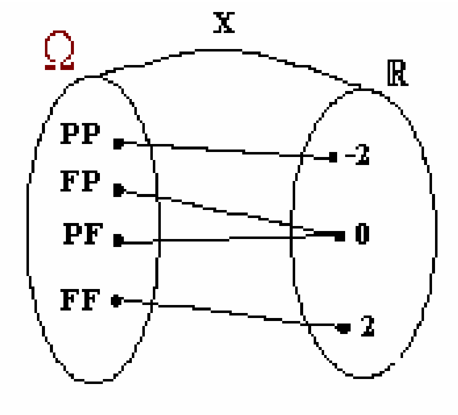
يربح اللاعب درهما (+1) عن كل وجه F ظهر و يخسر درهما (-1) عن كل وجه P ظهر

حدد كون الإمكانيات

أتمم الجدول

نتيجة التجربة	PP	FP	PF	FF
الربح				
الاحتمال				

و بهذا نحصل على التطبيق X



التطبيق X يسمى متغير عشوائي.

لنرمز للحدث " ربح x درهما " بـ $(X=x)$.

أكتب بتفصيل $(X=-2)$; $(X=0)$; $(X=2)$

الجواب $(X=-2)=\{PP\}$; $(X=0)=\{FP;PF\}$; $(X=2)=\{FF\}$

أتمم الجدول

x	-2	0	2
$p(X=x)$			

2-a – تعريف

ليكن $(\Omega;p)$ فضاءا احتماليا منتهيا .

كل تطبيق من Ω نحو $\mathbb{R}$ يسمى متغيرا عشوائيا .

b- كتابة و رموز

*- مجموعة الصور بالتطبيق X نرمز لها بـ $X(\Omega)$.

بما أن Ω منتهية فان $X(\Omega)$ منتهية $cardX(\Omega)\le card\Omega$.

نكتب عادة $X(\Omega)$ على الشكل $X(\Omega)=\{x_1;x_2;x_3......;x_n\}$ حيث $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec ....\prec x_n$

*- نرمز للحدث " X تأخذ قيمة x_i" بـ $(X=x_i)$

*- الكتابة $(X\le x_i)$ تعني X تأخذ قيمة أصغر من أو تساوي x_i

*- الكتابة $(X\prec x_i)$ تعني X تأخذ قيمة أصغر قطعا من x_i

*- الكتابة $(X\ge x_i)$ تعني X تأخذ قيمة أكبر من أو تساوي x_i

*- الكتابة $(x_i\prec X\prec x_j)$ تعني X تأخذ قيمة محصورة قطعا بين x_i و x_j

تمرين يحتوي كيس على 6 كرات بيضاء و 3 سوداء . نسحب من الكيس 3 كرات تانيا.
ليكن X المتغير العشوائي الدي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المسحوبة .
1- حدد $X(\Omega)$.
2- أحسب $p(X=0)$ $p(X=1)$ $p(X=2)$ $p(X=3)$ $p(X\leq 2)$ $p(X\succ 1)$

الجواب لدينا $card\,\Omega = C_9^3$
-1 $X(\Omega)=\{0;1,2,3\}$
2- الحد ث $(X=1)$ هو الحصول على كرة واحدة بيضاء $card\,(X=1)=C_6^1C_3^2$

ومنه $$p(X=1)=\frac{C_6^1C_3^2}{C_9^3}=\frac{3}{14}$$

$$p(X=0)=\frac{1}{84} \qquad p(X=2)=\frac{15}{28} \qquad p(X=3)=\frac{5}{21}$$

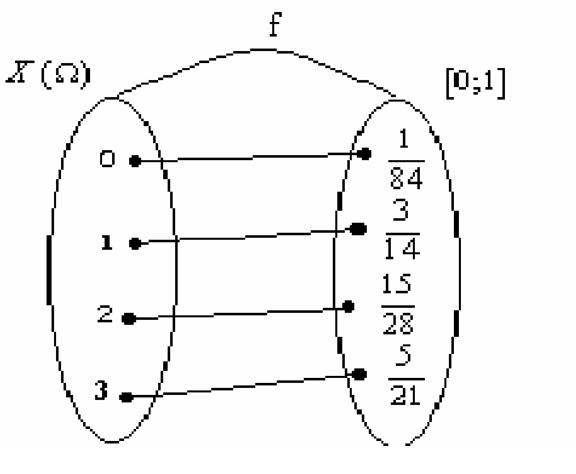
- لدينا $(X\leq 2)=(X=0)\cup(X=1)\cup(X=2)$

ومنه $$p(X\leq 2)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\frac{64}{84}$$

II- قانون احتمال متغير عشوائي

نعتبر التمرين السابق لدينا $X(\Omega)=\{0;1,2,3\}$
نعتبر التطبيق الذي يربط كل عنصر x_i من $X(\Omega)$ بالعدد $p(X=x_i)$

$X(\Omega)$	0	1	2	3
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{21}$



التطبيق f يسمى قانون احتمال المتغير العشوائي x

تعريف

قانون احتمال (أو توزيع) المتغير العشوائي X هو التطبيق f الدي يربط كل عنصر x_i من $X(\Omega)$
باحتمال الحدث $(X=x_i)$ أي $f(x_i)=p(X=x_i)$

ملحوظة يتم تحديد قانون احتمال متغير عشوائيX بتحديد $X(\Omega)$ و $p(X=x_i)$ لكل x_i من $X(\Omega)$
وكتابة النتائج المحصل عليها كما يلي

$X(\Omega)$	x_1	x_2	....	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	....	p_n

تمرين يحتوي كيس على ثلاثة بيادق تحمل العدد 2 و 5 بيادق تحمل العدد1 و بيدقين تحمل العدد 2-
نسحب من الكيس بيدقين بالتتابع و بدون احلال . ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بجداء العددين المسجلين على البيدقين المسحوبين .
حدد قانون احتمال X

III- دالة التجزيء

1- تعريف

ليكن X متغيرا عشوائيا معرفا على فضاء احتمالي منته $(\Omega;p)$.
الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=p(X\prec x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ تسمى دالة التجزيء للمتغير العشوائي X .

ملاحظة ليكن متغيرا عشوائيا X $X(\Omega)=\{x_1;x_2;..........;x_n\}$

إذا كان $x\le x_1$ فان $(X\prec x)=\varnothing$ ومنه $F(x)=p(\varnothing)=0$

إذا كان $x\succ x_n$ فان $(X\prec x)=\Omega$ ومنه $F(x)=p(\Omega)=1$

إذا كان $x_i\prec x\le x_{i+1}$ فان $(X\prec x)=(X=x_1)\cup(X=x_2)..........\cup(X=x_i)$

ومنه $F(x)=p(X=x_1)+p(X=x_2)+............+p(X=x_i)$

مثال نعتبر التمرين السابق لدينا $X(\Omega)=\{-4;-2;1;2;4\}$

$X(\Omega)$	-4	-2	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{12}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{8}{90}$

لتكن F دالة التجزيء للمتغير X

إذا كان $x\le -4$ فان $F(x)=p(X\prec x)=p(\varnothing)=0$

إذا كان $-4\prec x\le -2$ فان $F(x)=p(X\prec x)=p(X=-4)=\frac{12}{90}$

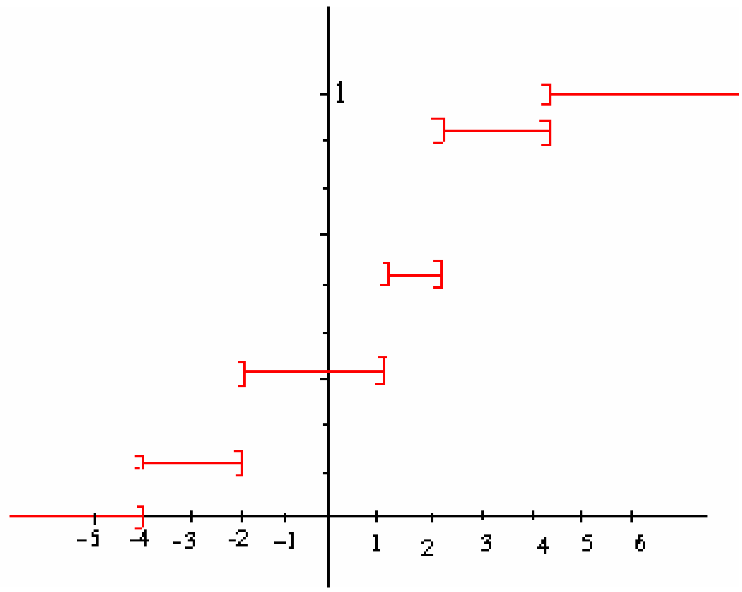
إذا كان $-2\prec x\le 1$ فان $F(x)=p(X\prec x)=p(X=-4)+p(X=-2)=\frac{32}{90}$

إذا كان $1\prec x\le 2$ فان $F(x)=p(X\prec x)=p(X=-4)+p(X=-2)+p(X=1)=\frac{52}{90}$

إذا كان $2\prec x\le 4$ فان $F(x)=p(X\prec x)=p(X=-4)+p(X=-2)+p(X=1)+p(X=2)=\frac{82}{90}$

إذا كان $4\prec x$ فان $F(x)=p(X\prec x)=p(\Omega)=1$

التمثيل المبياني للدالة F



IV- الأمل الرياضي

تعريف

ليكن X متغيرا عشوائيا معرفا على فضاء احتمالي منته $(\Omega; p)$

العدد الحقيقي $E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ يسمى الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X نرمز له كذلك ب $\bar{X}$

حيث $X(\Omega)=\{x_1;x_2;..........;x_n\}$ و $p_i=p(X=x_i)$

مثال ليكن X متغير العشوائي . نعتبر قانون الاحتمال التالي

$X(\Omega)$	-4	-2	1	2	4
$p(X=x_i)$	$\frac{12}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{8}{90}$

الأمل الرياضي $\bar{X}=\frac{-48}{90}+\frac{-40}{90}+\frac{20}{90}+\frac{60}{90}+\frac{32}{90}=\frac{24}{90}$

V- المغايرة و الانحراف الطرازي

تعريف

ليكن X متغيرا عشوائيا و $X(\Omega)=\{x_1;x_2;..........;x_n\}$ مجموعة القيم و $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

العدد $V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left[x_i-E(X)\right]^2$ يسمى مغايرة X حيث $p_i=p(X=x_i)$

العدد $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$ يسمى الانحراف الطرازي لـ X

صيغة أخرى للمغايرة $V(X)=E\left(\left[x_i-E(X)\right]^2\right)$ $V(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$

VI- التوزيع الحداني

نعتبر تجربة عشوائية مكونة من إعادة نفس الاختبار n مرة. ليكن A حدثا من هدا الاختبار بحيث p(A)=p

نعلم أن الاحتمال لكي يتحقق الحدث A , k مرة بالضبط هو $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

*- المتغير العشوائي الدي يربط كل نتيجة بالعدد k حيث k هو عدد المرات الدي يتحقق فيه الحدث A يسمى متغيرا عشوائيا حدانيا.

العددان n وp يسميان وسيطا المتغير الحداني .

خاصية

ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p $p(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

*- قانون احتمال المتغير العشوائي الحداني يسمى قانون حداني أو توزيع حداني .

مبرهنة

ليكن X متغيرا عشوائيا حدانيا وسيطاه n و p

$E(X)=np$ $V(X)=np(1-p)$

تمرين يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 3 سوداء .

نعتبر اللعبة : يسحب اللاعب كرتين بالتتابع و بدون إحلال و يعتبر اللاعب فائزا إذا كانت الكرتين المسحوبتين بيضاويين .

لعب اللاعب هده اللعبة 7 مرات ما هو الاحتمال لكي يفوز بها ثلاث مرات بالضبط .

ليكن Ω كوم إمكانيات الاختبار " سحب كرتين بالتتابع و بدون إحلال " $card\,\Omega=A_8^2=56$

A " الحصول على كرتين بيضاويتين " $cardA = A_5^2 = 20$ $p(A) = \frac{5}{14}$

المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة من النتائج التي يحصل عليها اللاعب بعدد المرات التي يفوز فيها هو متغير

عشوائي حداني وسيطاه 7 و $\frac{5}{14}$

إذن $p(X = 3) = C_7^3 \left(\frac{5}{14}\right)^3 \left(\frac{9}{14}\right)^4$