تمارين حول الاشـــــتقاق

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1

A - أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f بعد تحديد D_f و $D_{f'}$ في كل حالة من الحالات التالية :

1- $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x+1)^2}$ 2- $f(x)=\dfrac{\sin x}{2\cos x-1}$ 3- $f(x)=\cos\left(x^3-6x\right)$ 4- $f(x)=x\sqrt{x^2-4}$

5- $f(x)=\sqrt[3]{(2x+1)^2}$ 6- $f(x)=\sqrt[3]{2x+1}^{\,2}$ 7- $\begin{cases} f(x)=\tan x & x\geq 0 \\ f(x)=\arctan x & x<0 \end{cases}$

8- $f(x)=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ $f(x)=\arccos\dfrac{x}{1+x}$

B- أحسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan\dfrac{x}{x^2+1}}{x}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arccos(1-2x)-\dfrac{\pi}{2}}{4x^2-1}$ و $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\arcsin\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)-\dfrac{\pi}{2}}{x-1}$

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

1- حدد تقريبا للدالة f بدالة تالفية بجوار 0

2- أعط قيمة مقربة لكل من $\sqrt[3]{1,003}$ و $\sqrt[3]{0,998}$

تمرين 3

حدد مجموعة الدوال الأصلية ومجالات تعريفها لكل دالة من الدوال التالية

1- $f(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^2}-5$ 2- $f(x)=\dfrac{2x+2}{(x+1)^3}$

3- $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$ 4- $f(x)=\left(x^2-2x\right)\sqrt{x}$

5- $f(x)=x\cos\left(x^2+3\right)$ 6- $f(x)=(\cos x)^3$

7- $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x+1}}$ 8- $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$ 9- $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-2x^2+6x+8}}$

تمرين4

لتكن f دالة عددية معرفة ب $\begin{cases} f(x)=-x^2+2 & x\geq 1 \\ f(x)=3x-2 & x<1 \end{cases}$

1- بين أن f تقبل دالة أصلية على $[0;2]$

2- حدد مجموعة الدوال الأصلية لـ f على $[0;2]$

تمرين5

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أن نهاية f' عند 0 غير موجودة

تمرين6

لتكن f و F دالتين عدديتين معرفتين بـ

$$\begin{cases} f(x) = 2x\sin x - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1- بين أن f غير متصلة في 0

2- بين أن F دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$

تمرين7

نعتبر f دالة معرفة بـ $f(x) = \sin x - x^2$

1- بين أنه يوجد عدد حقيقي α من $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث $f(\alpha) = 0$

2- استنتج أن المعادلة $\cos x - 2x = 0$ تقبل حلا في $\mathbb{R}$

تمرين8

1- بين أن $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1;1]$

2- نعتبر f دالة معرفة بـ $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1-x}{1+x}$

بين أن f ثابتة على مجالات و حدد في كل مجال من هذه المجالات قيمة $f(x)$

تمرين9

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$

بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول مختلفة في $\mathbb{R}$

تمرين10

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a

أحسب $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$

تمرين 11

نعتبر أن الدالة العددية f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و تحقق:

أ- $f(x) \succ 0 \quad \forall x \in]0;1[$

ب- $f(0) = 0$

أثبت أنه $2\frac{f'(c)}{f(c)} = 3\frac{f'(1-c)}{f(1-c)} \quad \exists c \in]0;1[$

تمرين 12

نعتبر أن الدالة العددية f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ بحيث $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = l$

بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = l$

تمرين13

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x) = \arctan x$

-1 بين أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f'(x)=\dfrac{\sin\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$

-2 بين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^* \quad f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\times\sin\left(n\cdot\arctan\dfrac{1}{x}\right)$

تمرين 14

نعتبر f دالة عددية لمتغير حقيقي حيث $f(x)=\arccos\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

-1 حدد D_f

-2 أ- أحسب $f'(x)$ على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ و $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$

ب- استنتج صيغة مبسطة لـ $f(x)$ لكل x من D_f

-3 أدرس قابلية اشتقاق f في النقطتين 1- و 1

تمرين15

نعتبر أن الدالة العددية f متصلة على $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ بحيث $f(1)=1$ و $f(0)=0$

بين أن $\exists c\in]0;1[\quad 2cf'(c)=\sqrt{c}$

تمرين16

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\dfrac{1}{4}\tan\dfrac{1}{x+1}$

-1 بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|\leq\dfrac{1}{4\cos^2 1}$

-2 بين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

-3 أ- بين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- استنتج أن $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\} \quad |f(x)-\alpha|\leq\dfrac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

-4 نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0\in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\dfrac{1}{4}\tan\left(\dfrac{1}{u_n+1}\right) \end{cases}$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-\alpha|\leq\left(\dfrac{1}{4\cos^2 1}\right)^n|u_0-\alpha|$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين 17

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x+2-\sqrt{x^2+2x} & x\prec-2 \\ f(x)=\arctan\sqrt{x+2} & x\geq-2 \end{cases}$

-1 أدرس اشتقاق f عند 2-

-2 حدد الدالة المشتقة للدالة f

II- ليكن g قصور f على $[0;2]$ و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=g(u_n) & \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

1- أ) بين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}^{+}$
ب) بين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
ج) بين أن (u_n) متقاربة
2- أ) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$
ب) أثبت أن $g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x \in]0;2[$
ج) بين أن $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ استنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

تمرين18
لتكن f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a)=f(b)=0$ و $f'(a)=0$
بين أنه $\exists c \in \mathbb{N} \quad f'(c)=\frac{f(c)}{c-a}$

تمرين19 (مبرهنة LAGRANGE)
لتكن f و g متصلتين على $[a;b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث $g'(x)\neq 0 \quad \forall x \in]a;b[$
1- بين أن $g(a)\neq g(b)$
2- نعتبر الدالة ψ المعرفة على $[a;b]$ بـ: $\psi(x)=f(x)-f(a)-k\left(g(x)-g(a)\right)$
أ) حدد k لكي تكون $\psi(b)=0$
ب) استنتج أن $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \exists c \in]a;b[$

تمرين20
لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(x)\neq 0 \quad \forall x \in [0;1]$
بين أن f لها إشارة ثابتة على $[0;1]$

تمرين19
لتكن f متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$
ليكن $x_0 \in]a;b[$ و $k \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ بحيث $[x_0;x_0+h]\subset[a;b]$
1- بين أنه: $f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h) \quad \exists \theta \in]0;1[$
2- تطبيق نعتبر $f(x)=\frac{1}{x+1}$
حدد θ بدلالة h ثم أحسب $\lim_{h\to 0}\theta$

تمرين20
نعتبر الدالة f المعرفة بـ: $f(x)=\frac{2x-1}{2\left(x^2+1\right)}+\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
1- أدرس اتصال و اشتقاق f على D_f
2- بين أن $f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{\left(x^2+1\right)^n} \quad \forall x \in D_f$ حيث P_n حدودية يتم تحديد درجتها
($f^{(n)}$ المشتقة لـ f من الرتبة n)
3- بين أن جذور P_n كلها أعداد حقيقة و مختلفة مثنى مثنى