

## تمارين حول المعادلات التفاضلية

تمرين 1

- 1- أ- حل  $(x^2 + 1)y' - x = 0$
- ب- حل  $y'' = \cos 2x + e^{3x}$
- 2- حل  $y'' - 4y' + 2y = 4$  حيث  $y(0) = 2\sqrt{2}$  ;  $y'(0) = 0$
- 3- حل  $y'' - 4y' + 13y = 10 \cos 2x + 25 \sin 2x$

تمرين 2

- 1- حل المعادلات التفاضلية التالية
- $y(0) = 2$  ;  $y' - 5y = 0$        $y' + 3y = 0$
- $y'' - 4y' + 13y = 0$        $y'' - 4y' - 5y = 0$
- 2- حل المعادلات التفاضلية التالية
- $y'' + y = e^x$  ;  $y'' + 2y' + 5y = x^2 - 1$        $y' + y = e^{2x}$  ;  $y' - 3y = x$
- $y'' - 4y' + 4y = (x^3 + x)e^x$        $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 1$
- 3- نعتبر المعادلة التفاضلية  $(E) \quad y'' + y = e^{-|x|}$
- أ- حل المعادلة التفاضلية  $(E)$  في  $]-\infty; 0[$
- ب- حل المعادلة التفاضلية  $(E)$  في  $]0; +\infty[$
- ج- استنتج حلول المعادلة التفاضلية  $(E)$  في  $\mathbb{R}$

تمرين 3

- نعتبر المعادلة التفاضلية  $E: \quad y'' - \frac{5}{2}y' + y = \frac{-5}{2} \cos x$
- 1- بين أن الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow \sin x$  حل خاص للمعادلة  $E$ .
- 2- حل المعادلة  $E$ .

تمرين 4

- نعتبر المعادلة  $E: \quad y'' - 4y + 5y = e^{2x}$
- 1- حل المعادلة  $y'' - 4y + 5y = 0$
- 2- بين أن الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $x \rightarrow e^{2x}$  حل خاص للمعادلة  $E$
- 3- استنتج مجموعة حلول المعادلة  $E$

تمرين 5

- نعتبر  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{2x} \ln(1 + e^{-x})$
- 1- بين أن  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) - 2f(x) = \frac{-e^x}{1 + e^{-x}}$
- 2- أحسب  $\int_0^{\ln 2} f(x) dx$  . استنتج  $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1 + e^{-x}} dx$
- 3- حل المعادلة التفاضلية  $y' - 2y = \frac{-e^x}{1 + e^{-x}}$

تمرين 6

- نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين
- (E)  $y' + y = y^2 \sin x$
- (F)  $-y' + y = \sin x$

نضع  $z = \frac{1}{y}$  حيث  $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) \neq 0$

1- بين أن  $z$  حلا للمعادلة (F)  $\Leftrightarrow y$  حلا للمعادلة (E)

2- أ- بين أن  $z_0$  المعرف على  $\mathbb{R}$  بما يلي  $z_0(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$  حل خاص للمعادلة (F)

ب- استنتج حلول المعادلة (E) والتي لا تعتمد على مجموعة تعريفها

**تمرين 7**

لتكن  $F$  مجموعة الدوال العددية  $f$  التي تحقق:

(i)  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين على  $]0; +\infty[$

(ii)  $\forall x \in ]0; +\infty[ \quad f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

1- لتكن  $f$  عنصرا من  $F$  ونعتبر الدالة  $g$  المعرفة بما يلي  $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f(e^x)$

أ- بين  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x^2 f''(x) + f(x) = 0$

ب- استنتج أن  $g$  حل للمعادلة التفاضلية  $y'' - y' + y = 0$

2- أوجد جميع عناصر المجموعة  $F$

**تمرين 8**

نعتبر المعادلتين التفاضليتين التاليتين

(E)  $y \cdot y'' - 2y'^2 - 2yy' - y^2 = 0$

(F)  $z'' - 2z' + z = 0$

نضع  $z = \frac{1}{y}$  حيث  $\forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) \neq 0$

1- بين أن  $z$  حلا للمعادلة (F)  $\Leftrightarrow y$  حلا للمعادلة (E)

2- استنتج الحل  $f$  للمعادلة (E) بحيث  $f(1) = \frac{1}{e}$  ;  $f(0) = 1$

**تمرين 9**

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $f$  الدالة العددية المعرفة  $\mathbb{R}_+^*$  بما يلي  $f(x) = \int_0^1 t^n \sin(tx) dt$

1- أثبت أن  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \sin(u) du$

2- بين أن  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}_+^*$

3- أثبت أن  $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad xf'(x) + (n+1)f(x) = \sin x$

4- حدد الدوال العددية  $\varphi$  المعرفة على  $\mathbb{R}_+^*$  بحيث  $x\varphi'(x) + 3\varphi(x) = \sin x$