تمارين حول التكامـــل

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين1

1- حدد a ; b ; c حيث $\dfrac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-3}$ $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$

أحسب $\displaystyle\int_0^2 \frac{-3x^2+7x+2}{x^2-2x-3}dx$

2- أحسب $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+x^2+3}{x^2+1}dx$; $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{4x^2+4x+2}dx$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$

3- بين أن $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

أحسب $\displaystyle\int_0^x \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}dt$

تمرين2

1- باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$; $\displaystyle\int_0^1 x^2\ln(x^2+1)dx$ $\displaystyle\int_0^{\ln 2}(x+2)e^{2x}dx$

و $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$

2- حدد الدالة الأصلية لـ $x\to\sin^3 x$ التي تنعدم في0 على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^3 dx$

تمرين3

نعتبر $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$

1- أحسب I_1

2- بين $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$ باستعمال المكاملة بالأجزاء.

3- أحسب I_2 I_3

4- أستنتج $\displaystyle\int_0^1 (x^3+2x^2-2x)e^x\,dx$

تمرين4

1- بين أن $1-x\le\dfrac{1}{1+x}\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

2- استنتج $x-\dfrac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

3- استنتج تأطيرا لـ $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$ إلى 0,1.

تمرين5

1- أحسب التكاملات التالية بتغيير المتغير في الحالات التالية

$\displaystyle\int_0^{\ln 2}\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}dx$ $\left(e^{-x}=t\right)$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{1+x}dx$ $\left(\sqrt{x}=t\right)$

$\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x+\sqrt{x-1}}$ $\left(t=\sqrt{x-1}\right)$; $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[3]{x+1}$ $\left(t=\sqrt[3]{x+1}\right)$

$(t=\tan x)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^4 x}dx\quad ;\quad (t=\ln x)\ \int_1^2(\ln x)^2dx$

-2 حدد كتابة الشكل القانوني لـ $-x^2+3x-2$

ثم أحسب $\int_1^2\sqrt{-x^2+3x-2}\,dx$ $\left(x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sin t\right)$

تمرين6

أحسب $\int_0^1\frac{x^2-x+1}{1+x^2}dx$ $\qquad \int_0^1\frac{1}{1+e^x}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x\sin 2x}{1+\tan^2 x}dx \qquad \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}}\frac{x+2}{x\left(x^2+2\right)}dx \qquad \int_0^1\left(x\ln(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx$

تمرين7

-1 أ- أحسب $\int_1^{-1}\frac{t^2-1}{2-t}dt$

ب- أحسب $J=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{2-\cos x}dx$ نضع $t=\cos x$

-2 أ- بين أن $\frac{1}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1\}$ و أحسب $\int_1^2\frac{1}{x(x+1)^2}dx$

ب- أحسب $\int_1^2\frac{\ln x}{(1+x)^3}dx$

تمرين8

-1 تحقق أن $\frac{x^2-3x}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x-1)^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*-\{-1;1\}$

-2 أحسب $\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{3e^x-1}{\left(1+e^x\right)\left(1-e^x\right)^2}dx$ نضع $e^x=\frac{1}{t}$

تمرين9

-1 أحسب $\int_0^1\frac{dx}{2(x+1)\sqrt{x}}$ نضع $t=\sqrt{x}$

-2 أ- تحقق أن $\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{2}{x}-\frac{2x}{x^2+1}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$

ب- نعتبر $k\in[0;1]$. باستعمال المكاملة بالأجزاء أحسب $A_k=\int_k^1\frac{2x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

حدد $\lim\limits_{x\to 0}A_k$

تمرين10

-1 أ- تأكد أن $\frac{t^2-t+1}{t\left(t^2+1\right)}=\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+1}$

ب- أحسب $\int_0^{\frac{1}{2}\ln 3}\frac{e^{2x}-e^x+1}{1+e^{2x}}dx$ نضع $t=e^x$

-2 أحسب $\int_0^1\left(3x^2+2x+1\right)\ln(x+1)dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء

تمرين11

-1 تأكد أن $\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1} \quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

-2 أحسب $I\left(\alpha\right)=\int_{\alpha}^{1}\frac{x\ln x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ باستعمال المكاملة بالأجزاء حيث $\alpha\in\left]0;1\right[$

-3 أ- أحسب $\lim_{\alpha\to0^+} I\left(\alpha\right)$

تمرين12

نعتبر $n\in\mathbb{N}^*$ و $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(\sin x\right)^n}{\cos x}dx \quad ;I_0=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos x}dx$

-1 أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin x\right)^n\cos x dx$ و استنتج $I_{n+2}-I_n$ بدلالة n.

-1 أحسب I_1 و استنتج $I_3 \quad ; \quad I_5$

-2 أ- بين أن الدالة $x\to\ln\left[tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$ دالة أصلية للدالة $x\to\frac{1}{\cos x}$ على $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

ب- استنتج I_0 ثم $I_2 \quad ; \quad I_4$

تمرين13

نعتبر المتتالية العددية $\left(I_n\right)$ المعرفة بما يلي $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$

-1 أحسب I_{n+2} بدلالة I_n

-2 أحسب I_{2n} بدلالة n . حيث $n\in\mathbb{N}^*$

-3 بين أن $\left(I_n\right)$ تناقصية

-4 أحسب $\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n+1}}{I_n}$

-5 أحسب $\left(n+1\right)I_{n+1}\times I_n$

-6 بين أن $\lim_{n\to+\infty} I_n\times\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$

تمرين14

لكل عدد صحيح طبيعي n نرمز لـ f_n التطبيق المعرف من $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ نحو $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_n\left(x\right)=\frac{\sin\left(2\left(n+1\right)x\right)}{\sin x} \quad \forall x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right] \quad ; \quad f_n\left(0\right)=2\left(n+1\right)$$

-1 أ- بين أن f_n متصلة $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ و استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ المعرفة بما يلي

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n\left(x\right)dx$$

ب- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+1}-u_n=2\times\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{2n+3}$

ج- أحسب u_0 و u_1 و u_2 و u_3

-2 أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2\sum_{k=0}^{n}\frac{\left(1\right)^k}{2k+1}$

ب- أحسب $\int_0^1 dx$; $\int_0^1 x^{2k}dx$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$ و استنتج $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2\int_0^1\frac{1+(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

ج- أثبت أن $\frac{2}{2n+3} \leq \left|u_n-2\int_0^1\frac{1}{x^2+1}\right| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

د- أدرس تقارب المتتالية (u_n)

تمرين15

نعتبر $u_n=\int_0^1\frac{e^{nx}}{1+e^x}dx \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- بين أن $\frac{e^{nx}}{1+e}\leq\frac{e^{nx}}{1+e^x}\leq\frac{e^{nx}}{2} \quad \forall x\in[0;1] \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2- استنتج تأطيرا للعدد u_n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{e^n}$

تمرين16

أحسب النهايات

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$$

تمرين17

ليكن $\alpha\in]0;+\infty[$

1 - بين أن لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$

$$\int_n^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx\leq\frac{1}{n^\alpha}\leq\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^\alpha}dx$$

2- نضع $S_{(n;\alpha)}=1+\frac{1}{2^\alpha}+.....+\frac{1}{n^\alpha}$

أ- بين أن المتتالية $\left(S_{(n;\alpha)}\right)_{n\geq2}$

ب- بين أن $\int_1^{n+1}\frac{1}{x^\alpha}dx\leq S_{(n;\alpha)}\leq 1+\int_1^n\frac{1}{x^\alpha}dx$

3- استنتج أن من أجل $\alpha\succ1$ ، المتتالية $\left(S_{(n;\alpha)}\right)_{n\geq2}$ متقاربة.

و من أجل $0\prec\alpha\leq1$. المتتالية $\left(S_{(n;\alpha)}\right)_{n\geq2}$ متباعدة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{(n;\alpha)}$

تمرين18

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي $u_n=\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

نضع لكل n من $\mathbb{N}^*$ $\quad v_n=\ln(u_n)$

1- بين أن $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

2- استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4e^{-1}$