

تمرين 1

حدد $\arcsin\left(\sin\frac{-296\pi}{5}\right)$; $\arccos\left(\cos\frac{233\pi}{7}\right)$ و $\arctan\left(\tan\frac{-73\pi}{3}\right)$; $\arctan\sqrt{3}$

تمرين 2

مثل مبيانيا الدالتين $f : x \rightarrow \arctan(\tan x)$ $g : x \rightarrow \arcsin(\sin 2x)$

تمرين 3

-1 حدد النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x - 3}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x + 1} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x + 2x \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \times \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x + 1} - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x + 2}}{\sqrt{x - 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x - 1)}{x^2 - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{x^2 - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x - 3}} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(E\left(\frac{1}{x}\right) + E\left(\frac{2}{x}\right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x E\left(\frac{1}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}}$$

-2 حدد حسب قيم البرامترين الحقيقيين m و n النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{m}{x^3 - 1} \right) \text{ -ب-} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} + mx) \text{ -أ-}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - m)(x - n)}{x^2 + x} \text{ -د-} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{mx}{(x^2 - 1)^2} \right) \text{ -ج-}$$

تمرين 4

نعتبر f دالة المعرفة $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$ بـ $f(x) = 2x^2 - x + 1$

J من x لكل $f^{-1}(x)$ يجب تحديده ثم حدد J نحو مجال I تقابل من f بين أن

تمرين 5

-1 بين أن المعادلة $1 - x - \sin x = 0$ تقبل حلا في المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

-2 بين أن المعادلة $x^4 - \frac{4}{x} = x$ تقبل حلا في المجال $[1; 2]$.

-3 بين أن المعادلة $\sum_{i=1}^n \cos(ix)$ تقبل على الأقل حلا في $[0; \pi]$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

تمارين 6

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ حيث $f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$.
بين أنه يوجد c من $[a; b]$ حيث $f(c) = bc$.

تمارين 7

1- حل في \mathbb{R} في المعادلات

$$\text{أ- } x^3 + 27 = 0 \quad \text{ب- } \left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \right)^3 + 125 = 0 \quad \text{ج- } \arctan(x^2 - x + 2) = 0$$

$$\text{د- } \arccos x = \arcsin 2x \quad \text{ر- } \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2} \quad \text{ت- } t = \sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}}$$

2- حل في \mathbb{R} المتراجحتين التاليتين $\arctan(x^2 - 2x) > 0$ و $\arctan \sqrt{x+2} < \arctan(x+1)$

تمارين 8

$$\text{1- أحسب } \arctan \frac{\sqrt{3}}{3} ; \arctan \left(\tan \left(-\frac{31\pi}{3} \right) \right)$$

$$\text{2- أحسب } \arctan \frac{1}{3} + \arctan \frac{1}{2}$$

$$\text{3- بين أن } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [-1; 1] \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in [0; 1] \quad \arcsin x + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in [0; 1] \quad \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{2} \arcsin(2x) = \frac{\pi}{4}$$

تمارين 9

بين أن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \arctan(\tan 2x)$ تأليفة على مجالات ثم مثلها مبيانيا.

تمارين 10

حدد مجموعة تعريف الدالة f و ادرس اتصالها في هذه المجموعة

$$\text{1- } f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{2- } f(x) = \arccos 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$\text{3- } f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \text{4- } f(x) = \arcsin(3x - 4x^3)$$

تمارين 11

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2} & x \geq 3 \\ f(x) = x - 1 + \sqrt[3]{3-x} & x < 3 \end{cases}$$

نعتبر f دالة المعرفة بـ

1- حدد D_f و نهايات عند محداثها .

2- أدرس اتصال f .

3- ليكن g قصور الدالة f على $[3; +\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من $[3; +\infty[$ نحو المجال J يجب تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمارين 12

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = -x + \sqrt{x - E(x)}$

1- حدد D_f ثم حل في \mathbb{R} المعادلة $f(x) = 0$

2- ليكن k عددا صحيحا نسبيا

أدرس اتصال f على يمين و يسار k

أدرس اتصال f على $]k; k+1[$

3- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad -x \leq f(x) \leq -x + 1$. استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

تمرين 13

ليكن $n \in \mathbb{N}$. نعتبر الدالة f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ $f_n(x) = \frac{(1-x^2)^n}{(1-x) \times (1-x^2) \times \dots \times (1-x^n)}$

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{2^n}{1 \times 2 \times 3 \dots \times n}$

2- ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

أ- بين أنه إذا كان n فرديا فإن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{1-x^n} = 0$

ب- بين أنه إذا كان n زوجيا فإن $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{1-x^n} = \frac{2}{n}$

3- بين باستعمال الاستدلال بالترجع أنه لكل n من $\mathbb{N}^* - \{1\}$ $\lim_{x \rightarrow -1} f_n(x) = 0$

تمرين 14

أدرس اتصال الدالة f المعرفة على $]0;1[$ بـ $\begin{cases} f(x) = 0 & x \in]0;1[- \mathbb{Q} \\ f(x) = \frac{1}{p+q} & x \in \mathbb{Q} \cap]0;1[\end{cases}$

حيث $\frac{p}{q}$ الكتابة الجدرية المختصرة لـ x

تمرين 15

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $\begin{cases} f(x) = 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ f(x) = 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

1- أدرس اتصال الدالة f

2- أدرس اتصال الدالة $f \circ f$. ما ذا تستنتج؟

تمرين 16

لتكن f دالة معرفة من $]0;1[$ نحو $]0;1[$ ومتصلة على $]0;1[$

1- بين أن $\exists x_0 \in]0;1[\quad / \quad f(x_0) = x_0$

2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists a_n \in]0;1[\quad / \quad f(a_n) = a_n^n$

تمرين 17

لتكن f دالة معرفة من $]a;b[$ نحو $]a;b[$ ومتصلة على $]a;b[$

بين أن f تقبل نقطة صامدة

تمرين 18

ليكن λ عددا حقيقيا من $]0;1[$ لتكن f و g دالتين متصلتين على $]a;b[$

حيث $\forall x \in]a;b[\quad f(x) \leq g(x)$

بين إذا كان لكل من f و g نقطة صامدة فإن الدالة h المعرفة على $]a;b[$ بما يلي

$h(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x)$ تقبل أيضا نقطة صامدة

تمرين 19

لتكن f دالة متصلة و موجبة على \mathbb{R}^+ . نفترض أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$

بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا في \mathbb{R}^+

تمرين 20

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$ عناصر من $[a; b]$

بين أنه يوجد c من $[a; b]$ حيث $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

تمرين 21

لتكن f دالة عددية متصلة على $[0; 1]$

بين أنه $\exists c \in [0; 1] / f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$

تمرين 22

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$

1- أ- بين أن القصور g للدالة f على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ تقابل من $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

2- أ- بين أن القصور h للدالة f على $\left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$ تقابل من $\left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$ نحو مجال J يجب تحديده

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 23

نعتبر f دالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- أدرس اتصال f في 0

2- أدرس زوجية f ثم رتابتها

3- أ- بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد f^{-1}

ج- استنتج تعبيرا مبسطا لـ $f(x)$

تمرين 24

نعتبر f دالة المعرفة بـ $f(x) = \arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}\right)$

1- حدد D_f

2- حدد $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ و $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$

3- ليكن $x \in \mathbb{R}$ نضع $\theta = \arctan x$

بين أن $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{x+1}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}$

$$x < 1 \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{4} + \arctan x \quad \text{-4 استنتج أن}$$

$$x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{3\pi}{4} - \arctan x$$

- 5- أ- بين أن f تقابل من $]-\infty; 1[$ نحو مجال I يجيب تحديده
ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 25

نعتبر f دالة المعرفة بـ $f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$

1- حدد D_f

2- أ- بين أن f تقابل من $[0; 1]$ نحو مجال I يجيب تحديده

ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I

3- استنتج أن $\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = 2 \arcsin x$