قوانين تركيب داخلية – الزمرة – الحلقة – الجسم- الفضاء المتجهي

تمرين1

ليكن * قانون تركيب داخلي معرف في $\mathbb{R}$ بـ : $x*y = xy-4x-4y+20 \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

1- حدد العنصر المحايد للقانون* في $\mathbb{R}$

2- حدد العناصر التي تقبل مماثلا و حدد مماثلها.

تمرين2

نعتبر العملية T في $]-1,1[$ المعرفة بما يلي: $xTy = \dfrac{x+y}{1+xy}$

1- بين ان T قانون تركيب داخلي

2- حدد العنصر المحايد لـ T ثم حدد مماثلا x إن وجد

تمرين3

بين أن كل عنصر من $P(E)$ منتظم في $(P(E);\Delta)$

تمرين4

ليكن * قانون تركيب داخلي معرف في $\mathbb{R}$ بـ : $x*y=\dfrac{xy}{x+y} \quad \forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

حدد العناصر المنتظمة في $(\mathbb{R}^*;*)$

تمرين5

ليكن R مجموعة العناصر المنتظمة في (E,T)

نفترض أن T تجميعي .

بين أن R جزء مستقر في (E,T)

تمرين6

ليكن $A(E;E)$ مجموعة التطبيقات من E إلى E المزودة بقانون تركيب التطبيقات

بين أن مجموعة التطبيقات التباينية من E إلى E هي مجموعة العناصر المنتظمة على اليسار في $(A(E;E);o)$

تمرين7

ليكن * قانون تركيب داخلي في E حيث $x*(x*y)=(y*x)*x=y \quad \forall(x;y)\in E^2$

بين أن * تبادلي

تمرين8

نعتبر في $\mathbb{C}$ قانون تركيب داخلي معرف بـ: $zTz' = z\cdot\overline{z'} \quad \forall(z;z')\in\mathbb{C}^2$

1- أدرس تبادلية و تجميعية T

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(zTz)Tz=i$

تمرين9

نضع $E=\mathbb{C}-\{-i\}$

نعرف في $\mathbb{C}$ القانون الداخلي * بـ: $z*z' = zz'+i(z+z')-(1+i) \quad \forall(z;z')\in\mathbb{C}$

1- بين أن E جزء مستقر من $(\mathbb{C};*)$

2- نعتبر
$$\begin{array}{l}\varphi:\mathbb{C}^*\to E\\ z\to\ z-i\end{array}$$

بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*;\times)$ نحو $(E;*)$

3- استنتج العنصر المحايد لـ$(E;*)$والمماثل لكل عنصر من $(E;*)$

تمرين10

ليكن f تشاكل في $(E;*)$نحو$(F;T)$ و A جزء مستقر من $(E;*)$ و Bجزء مستقر من $(F;T)$

-1 بين أن $f^{-1}(B)$ جزء مستقر في $(E;*)$

-2 بين أن $f(A)$ جزء مستقر في $(F;T)$

تمرين11

لتكن $(G;\bullet)$ مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي • تجميعي بحيث

$$\forall(x;y)\in G^2 \quad x^2\bullet y=y \quad ; \quad y\bullet x^2=y$$

-1 بين أن $(G;\bullet)$ يقبل عنصرا محايدا e

-2 بين أن $\forall x\in G \quad x\bullet x=e$

-3 استنتج $(G;\bullet)$ زمرة تبادلية

تمرين12

$$a\in\mathbb{R}^* \quad f_a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$(x;y)\to\left(ax,\frac{y}{a}\right)$$

-1 بين أن f_a تقابل

-2 نعتبر $F=\left\{f_a / a\in\mathbb{R}^*\right\}$

حدد $f_a o f_{a'}$ $\forall(a;a')\in\mathbb{R}^2$واستنتج أن o قانون تركيب داخلي في F

-3 ليكن $h:\mathbb{R}^*\to F$
$a\to f_a$

a) بين أن h تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*;\times)$نحو $(F;o)$

b) استنتج العنصر المحايد لـ$(F;o)$و المماثل لكل عنصر من F

c) استنتج أن $(F;o)$ زمرة تبادلية

تمرين13

نعتبر التطبيق:

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$$
$$z\to(x;y)/z=x+iy$$

لنعتبر* قانون تركيب داخلي في $\mathbb{R}^2$ معرف بـ: $(x;y)\times(x';y')=(xx'-yy';xy'+x'y)$

-1 بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C};\times)$نحو $(\mathbb{R}^2;\times)$

- 2 استنتج أن $(\mathbb{R}^{*2};\times)$ زمرة تبادلية

تمرين14

ليكن $(G;*)$ زمرة عنصرها المحايد e. نعتبر عنصر a من Gو $(e\neq a)$

لتكن $C=\{x\in G / x*a=a*x\}$

بين أن $(c;*)$ زمرة جزئية لـ $(G;*)$(المجموعة C تسمى مركز الزمرة$(G;*)$)

تمرين15

ليكن$(H_1;*)$و$(H_2;*)$ زمرتين جزئيتين للزمرة $(G;*)$

بين أن $(H_1\cap H_2;*)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;*)$

تمرين16

ليكن $(G;*)$ زمرة عنصرها المحايد e

ليكن a وb عنصرين من G و$n\in\mathbb{N}^*$ حيث $(a.b)^n=e$

بين أن $(b.a)^n=e$

تمرين17

لتكن $(G;.)$ زمرة تبادلية و عنصرها المحايد e

ليكن $a\in G$ نرمز لـ $a^n=\underbrace{a.a.......a}_{n\text{ مرة } a}$ و $a^0=e$

ليكن a و b من G بحيث $a^k=b$; $a^n=e$ $\exists k\in\mathbb{N}^*-\{1\}$ $\exists n\in\mathbb{N}^*$

نعتبر $G_1=\left\{x\in G/\exists p\in\mathbb{Z};\quad x=a^p\right\}$ و $G_2=\left\{x\in G/\exists q\in\mathbb{Z};\quad x=b^q\right\}$

1- بين أن $(G_1;.)$ و $(G_2;.)$ زمرتان جزئيتان من $(G;.)$

2- بين أن $n\wedge k=1\Rightarrow G_1=G_2$

تمرين18

نعتبر $A=\left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ 2b & a+b \end{pmatrix}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$

بين أن $(A;+;\times)$ جسم تبادلي

تمرين19

$(A;+;\cdot)$ حلقة و f تشاكل شمولي من $(A;+;\cdot)$ نحو $(A;+;\cdot)$ المعرف بـ $f(x)=x^2$ $\forall x\in A$

بين أن $(A;+;\cdot)$ حلقة تبادلية

تمرين20

$(A;+;\cdot)$ حلقة، ليكن $a\in A$

نفترض أن a يقبل على اليمين مقلوبا وحيدا b

بين أن a منتظم على اليسار و أن a يقبل مقلوبا و أن $a^{-1}=b$

تمرين21

$(A;+;\cdot)$ حلقة

نعتبر القانون * المعرف على A بـ $x*y=xy-yx$

1- بين إن * ليس تجميعي و لا يقبل عنصرا محايدا

2- بين أن * ليس تبادليي و أن * توزيعي على الجمع

3- بيت أن $x*y=-y*x$ $\forall(x;y)\in A^2$

4- بين أن $x*(y*z)+y*(z*x)+z*(x*y)=0_A$ $\forall(x;y;z)\in A^3$

تمرين22

نعتبر في $\mathbb{R}$ القانونين $\oplus$ و $\otimes$ المعرفين بـ $x\otimes y=x+y-xy$ و $x\oplus y=x+y-1$

بين أن $(\mathbb{R};\oplus;\otimes)$ جسم

تمرين23

نعتبر $(A;+;\cdot)$ حلقة واحدية (نفترض 1 هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون الداخلي .)

ليكن x وy عنصرين من A يحققان الشرطين

$xy+yx=1$ (i

$x^2y+yx^2=x$ (ii

1- بيت أن $x^2y=yx^2$ و أن $xyx+xyx=x$

2- استنتج $xy = yx$

تمرين24

$(A;+;\cdot)$ حلقة

لنفترض أن $(xy-yx)^2 = xy - yx \quad \forall (x;y)\in A^2$

1- بين أن $xy = 0 \Rightarrow yx = 0 \quad \forall (x;y)\in A^2$

2- استنتج $xa = ax \quad \forall a\in A \Leftrightarrow x^2 = x$

3- بين أن $xy - yx = yx - xy \quad \forall (x;y)\in A^2$

4 - بين أن $x^2a = ax^2 \quad \forall x\in A$

تمرين25

$$A = \left\{ a + b\sqrt{2} \,/\, (a;b)\in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

1- بين اذا كان a و b من $\mathbb{Z}$ فان $a + b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = 0$

2- بين أن $(A;+;\cdot)$ حلقة و أنها ليس جسما

3- نعتبر

$$\begin{aligned} \varphi : A &\to \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{2} &\to a^2 - 2b^2 \end{aligned}$$

أ- بين أن $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y) \quad \forall (x;y)\in A^2$

ب- بين x يقبل مقلوبا $\Leftrightarrow (\varphi(x))^2 = 1$

تمرين26

نعتبر $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -3b & a \end{pmatrix} / (a;b)\in \mathbb{R}^2 \right\}$

1- بين أن $(A;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

2- بين أن $(A;+;\times)$ جسم

3- ليكن $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

أ- تأكد أن $J \in A$

ب- أحسب $J^n \quad (n\in \mathbb{N}^*)$

تمرين27

نعتبر $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} / (a;b)\in \mathbb{R}^2 \right\}$

1- بين أن $(A;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

2- بين أن $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = a^n I + na^{n-1}bJ \quad \forall n\in \mathbb{N}^*$ مع $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

تمرين28

نعتبر $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

1- بين أن $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n - 1 \\ 2 - 2^{n+1} & 2 - 2^n \end{pmatrix} \quad \forall n\in \mathbb{N}^*$

2- بين أن A^n يقبل مقلوبا في $\left(M_2(\mathbb{R});\times\right)$ و حدده

تمرين29

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1- احسب A^2 و A^3

2- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad A^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

3- بين أن $(A-1)^2=0$

4- استنتج A^{-1}

تمرين30

نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a+mb\end{pmatrix}$ و $E_m=\left\{M_{(a;b)}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ حيث m عدد ثابت

1- أ) بين أن E_m مستقرة بالنسبة للجمع و الضرب في $M_2(\mathbb{R})$

ب) بين أن $(E_m;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

2- بين اذا كان $m\in]-2;2[$ فان $(E_m;+;\times)$ جسم

3- لتكن (O) مجموعة التطبيقات $f_{(a;b)}$ في الفضاء V_2 المزود بالأساس $(\vec{i};\vec{j})$ المعرفة بما يلي

$$\forall\vec{u}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in V_2\qquad \forall\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}\in V_2\qquad f_{(a;b)}(\vec{u})=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=ax-by\\ y'=bx+ay\end{cases}$$

نعتبر التطبيق φ المعرف من E_0 نحو (O) بـ: $\varphi\left(M_{(a;b)}\right)=f_{(a;b)}\qquad \forall M_{(a;b)}\in E_0$

بين أن φ تشاكل من $(E_0;\times)$ نحو $((O);\circ)$

تمرين31

نعتبر المصفوفات $M_\lambda=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ \frac{1}{4}b & a+\lambda b\end{pmatrix}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ حيث $\lambda\in]-1,1[$

1- بين أن M_λ مستقرة بالنسبة للضرب و الجمع في $M_2(\mathbb{R})$

2- بين $(M_\lambda,+,\times)$ جسم تبادلي

3- نعتبر $(M_\lambda,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي نضع $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \frac{1}{4} & \lambda\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

أثبت أن (A,I) أساس للفضاء $(M_\lambda,+,\bullet)$

تمرين32

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ نعتبر المصفوفتين $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

1- بين أن (A,I) أسرة حرة في $M_2(\mathbb{R})$

2- نعتبر المجموعة $E=\left\{\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ 2x & 3x+y\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

أ- بين أنه لكل مصفوفتين M و N من E ولكل عدد حقيقي α لدينا : $M+N\in E$ و $\alpha M\in E$

ب- بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 2

تمرين33

نعتبر المجموعة E المكونة من المصفوفات $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ حيث a وb عددان حقيقيان

I وJ المصفوفتان حيث $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ و $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1- a-بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية ل $(M_2(\mathbb{R}),+)$

b-بين أن $\forall M\in\mathbb{R},\forall\alpha\in\mathbb{R},\quad \alpha M\in E$

c-بين أن $(E,+,\bullet)$ فضاء متجهي حقيقي

d- أثبت أن (I,J) أساس للفضاءE

2-أ- تحقق أن $J^2=-I+J$

ب- بين أن E مستقر في $(M_2(\mathbb{R}),+)$

ج- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

تمرين34

ليكن $\vec{E}$ فضاء متجهي حقيقي منسوبا للأساس $B=(\vec{i};\vec{j};\vec{k};\vec{e})$ نضع $\vec{a}=\vec{i}-\vec{e}$ و $\vec{b}=\vec{j}-\vec{e}$ و

$\vec{c}=\vec{k}-2\vec{e}$

$\vec{F}=\{\vec{u}(x;y;z;t)\in\vec{E}/x+y+2z+t=0\}$

1- بين أن $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ حرة

2- بين أن $\vec{F}$ فضاء متجهي حقيقي

3- حدد $\dim\vec{F}$

تمرين35

في $M_3(\mathbb{R})$ نعتبر $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ليكن $E=\{xI+yA+zB/(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\}$

بين أن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

تمرين36

ليكن $\vec{E}$ فضاء متجهي حقيقي بعده 3 و $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ أسرة من متجهتين من $\vec{E}$ مستقلتين

نعتبر $\overline{S}=\{\alpha\vec{e}_1+\beta\vec{e}_2/(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\}$

بين أن $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ حرة $\Leftrightarrow \vec{e}_3\notin\overline{S}$

تمرين37

نعتبر $E=\{(u_n)/\forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2}=u_{n+1}+u_n\}$

1- بين أن $(E;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- حدد q من $\mathbb{R}^*$ حيث $(q^n)\in E$

3- ليكن $a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ و $b_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

بين أن المتتاليتين (a_n) و (b_n) مستقلتان خطيان و تحددان أساسا في E

تمرين38

نعتبر $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ مصفوفتين من $M_2(\mathbb{R})$ و $E=\{M\in M_2(\mathbb{R})/M^2=O\}$

1- ليكن $A\in E$ حيث $A\neq I$ و $A\neq O$

بين أن $(A;I)$ أسرة حرة

2- نضع $H=\{xI+yA/(x;y)\in\mathbb{R}^2\}$

بين أن $\forall(M;N)\in H^2 \quad M\times N\in H$

3- ليكن $B=I+A$ حيث $A\in E$

أ- أحسب B^n بدلالة A و I حيث $n\in\mathbb{N}$ و استنتج المجموع $S_n=I+B+B^2....+B^n$ بدلالة A و I

ب- أحسب S_n من أجل $B=\begin{pmatrix}7&-4\\9&-5\end{pmatrix}$

تمرين39

ليكن $E=\left\{M_{(x;y)}=\begin{pmatrix}x&y\\-y&x+y\end{pmatrix}/(x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

1- بين أن $(E;+;\times)$ جسم تبادلي

2- ليكن $z_0=a+ib\ /\ (a;b)\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$

نعتبر التطبيق
$$f\quad E\to\mathbb{C}$$
$$M_{(x;y)}\to x+yz_0$$

أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(E;+)$ نحو $(\mathbb{C};+)$

ب- حدد z_0 لكي يكون f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$

3- نعتبر $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$

بين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي وحدد بعده

4- نضع $G=\{J^n/n\in\mathbb{N}\}$

أ- أحسب J^2 ; J^3

ب- استنتج أن G مجموعة منتهية وحدد عناصرها

تمرين40

نعتبر D_2 مجموعة الدوال العددية f القابلة للاشتقاق مرتين على $]0;+\infty[$

حيث $\forall x\in]0;+\infty[\quad xf''(x)-(x+1)f'(x)+f(x)=0$

1- بين $(D_2;+;\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- نضع $v(x)=e^x \quad u(x)=x+1 \quad \forall x\in\mathbb{R}_+^*:$

بين أن $(u;v)$ أسرة حرة في D_2

3- بين أنه اذا كان $f\in D_2$ فان $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'''(x)-f''(x)=0$

4- حل المعادلة التفاضلية $y'-y=0$ و استنتج أنه يوجد $(a;b;c)$ من $\mathbb{R}^3$ حيث

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f(x)=ae^x+bx+c$

5- بين أن $(u;v)$ أساس للفضاء D_2 و استنتج بعد D_2

تمرين41

I- لكل $(a;b)$ من $\mathbb{R}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

في $M_2(\mathbb{R})$،لتكن (E) مجموعة المصفوفات الاتية: $(E)=\left\{M_{(a;b)}/(a;b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

1- بين أن (E) جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R});+)$ و من $(M_2(\mathbb{R});\times)$.

2- بين أن $((E);+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية.

3- أ) بين أن لكل عددين حقيقيين x و y، لدينا: $x^2+xy+y^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$

ب) حدد العناصر التي تقبل مقلوبا في الحلقة $((E);+;\times)$.

ج) استنتج أن $((E);+;\times)$ جسم تبادلي.

II- ليكن σ عددا عقديا لا ينتمي الى $\mathbb{R}$.

1- بين أن $(1;\sigma)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C};+;\times)$.

2- نعتبر التطبيق ψ من (E) نحو $\mathbb{C}$ المعرف بما يلي .

$$\psi:\quad (E)\to\mathbb{C}$$
$$M_{(a;b)}\to a+\sigma b$$

بين أن ψ تشاكل تقابلي من $((E);+)$ نحو $(\mathbb{C};+)$

3- نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-z+1=0$

حل في $\mathbb{C}$ هذه المعادلة و أكتب حليها على الشكل المثلثي.

4- نفترض في هذا السؤال أن $\sigma=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

بين أن ψ تشاكل من $((E);\times)$ نحو $(\mathbb{C};\times)$

تمرين42

لتكن C مجموعة الدوال المتصلة في $\mathbb{R}$. نذكر أن $(C;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

نعتبر E مجموعة الدوال القابلة للاشتقاق مرتين في $\mathbb{R}$ و التي تحقق:

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad 4f''(x)-4f'(x)+f(x)=0$$

f' و f'' المشتقة الأولى و المشتقة الثانية للدالة f

1- بين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

2- ليكن a عدد حقيقي

بين أن الدالة $x\to e^{ax}$ تنتمي إلى E إذا وفقط إذا كان $a=\frac{1}{2}$

3- أ) بين أن $f\in E$ إذا وفقط إذا كانت الدالة g المعرفة بـ

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=e^{\frac{-x}{2}}f(x)$ تحقق $\forall x\in\mathbb{R}\quad g''(x)=0$

ب) استنتج أن E هي مجموعة الدوال $f_{a;b}$ حيث $\forall x\in\mathbb{R}\quad f_{a;b}(x)=(ax+b)e^{\frac{x}{2}}$

a و b عددان حقيقيان اعتباطيان

ج) بين أن $(f_{1;0}:f_{0;1})$ أساس لـ E

4- نعبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x)=xe^{\frac{x}{2}}$; $v(x)=\left(-\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}$

أ – بين أن u و v أساس لـ E

ب- أدرس تغيرات u و v و أنشئ منحنييهما C_u و C_v

ج- حدد تقاطع C_u و C_v

د- ليكن λ عدد سالب

أحسب A_λ مساحة الحيز المحصور بين C_u و C_v و المستقيمين $(\Delta_1):x=\lambda$; $(\Delta_2):x=\frac{2}{3}$

حدد $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A_\lambda$

تمرين 43

I- لكل $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$، نعتبر المصفوفة $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix} a & b\sqrt{2} \\ b\sqrt{2} & a \end{pmatrix}$

في $M_2(\mathbb{R})$،لتكن (E) مجموعة المصفوفات الاتية: $(E)=\left\{M_{(a;b)} / a^2-2b^2=1\right\}$.

1- نضع $A=\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$ ، تحقق أن $A\in(E)$

2- أ- بين أن (E) جزء مستقر في $(M_2(\mathbb{R});\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في (E)

ب- بين أن جميع عناصر (E) تقبل مقلوبا في (E) بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$

ج- بين أن $((E);\times)$ زمرة تبادلية.

3- نضع $A^0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و لكل n من $\mathbb{N}$ $A^{n+1}=A^n\times A$. نعتبر المجموعة $G=\left\{A^n / n\in\mathbb{N}\right\}$

أ) تحقق أن $G\subset(E)$

ب) لتكن H مجموعة مماثلات مصفوفات G بالنسبة للعملية $\times$ في (E)

بين أن $H=\left\{B^n / n\in\mathbb{N}\right\}$ حيث $B\begin{pmatrix} 3 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

ج) بين أن $G\cup H$ زمرة جزئية من $((E);\times)$

تمرين44

نعتبر $(E)=\left\{M\in M\in M_3(\mathbb{R}) / AM=MA\right\}$ حيث $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1- أن بين أن $(E;+;.)$ فضاء متجهي حقيقي

2- أحسب A^2 ; A^3 ; A^n لكل $n\geq 3$

3- بين أن $(I;A;A^2)$ أساس للفضاء $(E;+;.)$ واستنتج بعده

4- بين أن $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

5- هل هي جسم؟

6- أحسب B^n لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$