تمارين حول المتتاليات العددية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمرين1

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$$

1- بين أن $(u_n)_{n\geq1}$ تزايدية .

2- أحسب $u_2 \quad ; \quad u_3$

3- بين أن $u_n \prec 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

تمرين2

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) \end{cases}$$

1- أحسب $u_1 \quad ; \quad u_2$

2- بين أن $u_n \succ 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3- بين أن (u_n) تناقصية و استنتج أن $u_n \leq \frac{5}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4- أ- تأكد أن $u_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{u_n}\right)(u_n - 2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- بين أن $0 \prec u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{10}(u_n - 2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج- استنتج أن $0 \prec u_n - 2 \leq \left(\frac{1}{10}\right)^n \times \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ثم حدد $\lim u_n$

تمرين3

نعتبر المتتاليتين المعرفتين بـ
$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - u_n$$

1- بين أن (v_n) متتالية ثابتة .

2- استنتج أن (u_n) متتالية حسابية و حدد عناصرها المميزة .

3- أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} v_i$ بدلالة n.

4- أحسب $S'_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

تمرين4

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1- أحسب u_2 ; u_3

2- بين أن $u_n \prec 3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3- أدرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$ و استنتج أن $u_n \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

4- نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $v_n = u_n - 3$

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n .

ب- أحسب $S_n = \sum_{i=1}^{i=n} u_i$ بدلالة n.

تمرين5

لتكن (u_n) و (v_n) المتتاليتين المعرفتين بمايلي

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5 - \dfrac{9}{u_n + 1} \end{cases} \qquad v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

1- بين أن (v_n) متتالية حسابية و أحسب v_n بدلالة n

2- حدد $\lim u_n$

تمرين6

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 12 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

1- نضع $w_n = v_n - u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

أ- بين أن $(w_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب w_n بدلالة n

ب- حدد $\lim w_n$

2-- أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية

ب- بين أن $u_n \prec v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

ج- استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متقاربتين

تمرين7

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3} \end{cases} \quad ; \quad v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

1- أحسب u_2 و u_3 و v_2

2- بين أن $0 \leq u_n \leq 3$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

2- أدرس رتابة $(u_n)_{n\geq 1}$

3- أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n

4- أحسب بدلالة n المجموع $S_n=\sum_{i=1}^{i=n} v_i$ ثم حدد $\lim S_n$

تمرين8

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\begin{cases} u_0=1 \quad u_1=3 \\ u_{n+2}=8u_{n+1}-7u_n \end{cases} \quad ; \quad v_n=u_{n+1}-u_n$$

1- أحسب u_3 و v_2 .

2- بين أن (v_n) متتالية هندسية و أحسب v_n بدلالة n.

3- أحسب بدلالة n المجموع $S_n=\sum_{i=0}^{i=n-1} v_i$ ثم استنتج u_n بدلالة n .

تمرين 9

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2} \end{cases}$$

1- بين أن $u_n \prec 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

2- بين أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تزايدية و استنتج أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة .

3- أ- بين أن $2-u_{n+1} \prec \dfrac{2-u_n}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ب- بين أن $0\prec 2-u_n \prec \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

ج- استنتج $\lim u_n$

تمرين10

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=u_n(u_n+1) \end{cases}$$

1- أحسب u_1 و u_2.

1- بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

2- بين أن $u_{n+1}\succ 2u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ و استنتج $u_n\succ 3\times 2^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

4- أحسب $\lim u_n$

تمرين11

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ
$$\begin{cases} u_0=-\dfrac{5}{4} \\ u_{n+1}=(u_n+2)^2-2 \end{cases}$$

1- بين أن $-2\prec u_n \prec -1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$.

2- بين أن (u_n) متتالية تناقصية .

3- استنتج أن (u_n) متقاربة .

4- أحسب $\lim u_n$.

تمرين12

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ حيث $0 \prec a \prec b$ و (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_0 = b \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1- بين أن $u_n \prec v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2 - أ- بين أن (u_n) متتالية تزايدية و أن (v_n) متتالية تناقصية

ب- بين أن (u_n) و (v_n) متحاديتان

3- بين أن $u_n \times v_n = ab \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4- استنتج نهاية كل من (u_n) و (v_n)

تمرين13

لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين عدديتين معرفتين بما يلي $v_n = u_{n+1} - u_n$; $\begin{cases} u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 10u_{n+1} - 9u_n \end{cases}$

1- أعط تعبير u_n بدلالة n

2- بين أن (v_n) متتالية هندسية بدون استعمال السؤال 1 و أحسب v_n بدلالة n.

ثم أحسب بدلالة n المجموع $S_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} v_i$

3 - نضع $w_n = u_{n+1} - 9u_n$

بين (w_n) ثابثة و استنتج أن $u_{n+1} = 9u_n + 1$

4- أحسب $S'_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} u_i$

تمرين14

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $\begin{cases} u_0 \in]0;1[\\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - u_n}\right) \end{cases}$

1- أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \prec u_n \leq \dfrac{1}{2}$

ب- تحقق أن $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(4u_n - 3)}{2\left(1 - 2u_n + \sqrt{1 - u_n}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ثم بين أن المتتالية (u_n) تناقصية

ج- استنتج المتتالية (u_n) متقاربة

2- أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد θ من $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ بحيث $\sin\theta = \sqrt{u_0}$

ب- بين أن $u_n = \sin^2\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$

3- نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ بحيث $v_n = (u_n)^{\frac{1}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

أ- بين أن $\dfrac{2}{\pi}x \prec \sin x \prec x \quad \forall x \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$

ب- استنتج أن $\frac{\theta^{\frac{2}{n}}}{2^2} \prec v_n \prec \frac{\theta^{\frac{2}{n}}}{\pi^{\frac{2}{n}} \cdot 2^{2-\frac{2}{n}}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

تمرين15

نعتبر $(u_n)_{n\geq 2}$ و $(v_n)_{n\geq 2}$ متتاليتين عدديتين معرفتين بـ $u_n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$; $v_n = 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{2^n}$

1- بين أن $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية و أن $(v_n)_{n\geq 2}$ تناقصية.

2- بين أن $u_n \prec v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

3- استنتج أن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 2}$ و $(v_n)_{n\geq 2}$ متقاربتين و حدد نهاية كل منهما

تمرين16

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين حيث $u_{n+1} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

و $v_n = \frac{u_n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية

تمرين17

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1- بين أنه $\sqrt{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

2- استنتج أنه $u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3- نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بـ $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

بين أن $(v_n)_{n\geq 1}$ تزايدية ومتقاربة

تمرين18

1- بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة $\tan\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{2nx}$ $x \in]0;1[$ (E): تقبل حلا وحيدا يرمز له بـ x_n

2- بين أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ تناقصية قطعا

3- استنتج أن المتتالية $(x_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

4- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x_n = 0$

5- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{n}x_n$

تمرين19

لتكن (u_n) متتالية عددية و l عددا حقيقيا

1- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

2- بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$

3- تطبيق أدرس تقارب المتتالية (u_n) حيث $u_n = (-1)^n$

تمرين20

ليكن $\theta \in]0;\pi[$ و $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية عددية معرفة بـ

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\times......\times\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$$

1- بين أنه $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{2^n}\times\frac{\sin\theta}{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}$

2- استنتج $\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$

تمرين21

نعتبر الدالتين العدديتين f و g المعرفتين بما يلي :

$$g(x) = \frac{1}{3}\sin x + 2 - x \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{3}\sin x + 2$$

1- بين أنه $\exists!\alpha \in \mathbb{R} / \quad g(\alpha) = 0$

2- بين أنه $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y| \quad \left(\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\right) \quad \left(\exists k \in]0;1[\right)$

3- استنتج أن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1} = f(u_n) \qquad u_0 \in \mathbb{R}$ متقاربة و نهايتها α

تمرين22

لتكن f دالة معرفة من $[a;b]$ نحو $[a;b]$ و تحقق $|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \quad \left(\forall (x;y)\in[a;b]^2\right)$

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1} = \frac{u_n + f(u_n)}{2} \qquad u_0 \in [a;b]$

1- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq u_n \leq b$

2- نفترض أن $u_0 \leq f(u_0)$

أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq f(u_n)$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة.

تمرين23

نعتبر المتتاليات (u_n) و (v_n) و (w_n) المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{10}u_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \quad ; \quad v_1 = 1 \\ v_{n+2} = 5v_{n+1} - 6v_n \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} w_0 = 1 \quad ; \quad w_1 = -2 \\ w_{n+2} - 2(\cos\alpha)w_{n+1} + w_n = 0 \end{cases}$$

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

1- أ- حدد كل من u_n و v_n بدلالة n

ب- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

2- حدد w_n بدلالة n

تمرين24

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1} = u_n\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و $u_0 = 1$

1- أ- بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \succ 0$

ت- بين أن (u_n) متتالية تناقصية

2- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ $v_n = u_n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية و حدد v_n بدلالة n

ب- استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$

3- نقبل أن $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad x-\frac{x^3}{6}\prec\sin x\prec x$

أ- بين أن $1\prec\frac{x}{\sin x}\prec 1+x^2\quad \forall x\in\left]0;1\right]$ استنتج أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \frac{2}{\pi}\prec u_n\prec\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2^{n+1}}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين25

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1}=1+\frac{1}{1+u_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$ و $u_0=1$

1- أحسب u_1 و u_2 و u_3

2- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\le u_n\le\frac{3}{2}$

3- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \left|u_{n+1}-u_n\right|\le\frac{1}{4}\left|u_n-u_{n-1}\right|$

4- نعتبر المتتاليتين العدديتين (x_n) و (y_n) المعرفتين بـ $x_n=u_{2n}$ و $y_n=u_{2n+1}$ لكل $n\in\mathbb{N}$

أ- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad y_n=1+\frac{1}{1+x_n}$

ب- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n\le y_n$

ت- بين أن المتتالية (x_n) تزايدية و أن المتتالية (y_n) تناقصية.

ث- بين أن (x_n) و (y_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية l يتم تحديدها

5- بين أنه $\left|u_{n+1}-\sqrt{2}\right|\le\frac{1}{4}\left|u_n-\sqrt{2}\right|\quad \forall n\in\mathbb{N}$ و استنتج نهاية (u_n)

تمرين26

1- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_{n+1}=\sqrt[3]{9(u_n-1)}\quad \forall n\in\mathbb{N}$ و $u_0=2$

بين أن (u_n) تزايدية

2- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ $v_{n+1}=\sqrt[3]{9(v_n-1)}\quad \forall n\in\mathbb{N}$ و $v_0=3$

بين أن (v_n) تناقصية

3- بين أنه $f(x)-f(y)\le\frac{1}{\sqrt[3]{3}}(x-y)\quad \forall(x;y)\in[2;3]^2$ حيث $(x\succ y)$ و $f(x)=\sqrt[3]{9(x-1)}$

4- استنتج أنه $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad 0\prec v_n-u_n\prec 3^{-\frac{n}{3}}$

5- بين أنه $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2\prec v_n\le 3$

6- استنتج أن (u_n) و (v_n) متحاديتان و أن نهايتهما حلا للمعادلة $x^3-9x+9=0$

تمرين27

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $\begin{cases} u_0=1\quad ;\quad u_1=2\\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}\end{cases}$

1- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}\quad 1\le u_n\le 4$

2- أدرس رتابة (u_n) و استنتج أن (u_n) متقاربة

3- نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) حيث $\begin{cases} b_0 = |a_0| \quad ; \quad b_1 = |a_1| \\ b_{n+2} = \frac{1}{3}(b_{n+1} + b_n) \end{cases}$; $a_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$

أ- بين أن $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2(a_{n+2} + 2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ب- بين أن $|a_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|a_{n+1}| + |a_n|) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ت- حدد b_n بدلالة n و استنتج $\lim b_n$

ث- بين أن $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

استنتج $\lim a_n$ ثم $\lim u_n$