

تمارين حول دراسة الدوال - د1-

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1

أدرس f و أنشئ منحناها في الحالات التالية

$$\begin{cases} f(x) = (2-x)^{\frac{3}{2}} & x < 2 \\ f(x) = -\arctan \sqrt{x-2} & x \geq 2 \end{cases} \quad \text{أ- } f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} \quad \text{ب-}$$

تمرين 2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{2-x} & x \in [0;1] \\ f(x) = x - \sqrt{x^2-x} & x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

لتكن f دالة عددية معرفة بـ

1- أدرس اتصال f في 0 و 1 وحدد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق f في كل من 0 و 1 و أول النتيجة هندسيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل $x \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ و ادرس إشارتها و أعط جدول تغيرات f .

4- أدرس الفروع اللانهائية ل C_f ثم أنشئ C_f $\|i\| = \|j\| = 2cm$

تمرين 3

$$\begin{cases} f(x) = x - 2\arctan(x) & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x-1} & x < 0 \end{cases}$$

لتكن f دالة عددية معرفة بـ

1- احسب نهاية f عند $-\infty$, $+\infty$

2- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أعط معادلة المماس ل C_f عند النقطة ذات الافصول 0.

3- احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}^* ثم ادرس تغيرات f .

4- ادرس الفروع اللانهائية ل C_f ثم أنشئ C_f

5- ليكن g قصور ل f على $I =]-\infty;0[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 4

$$f(x) = \sqrt{2x+1} - \frac{x}{\sqrt{2x+1}} \quad \text{ب-} \quad \left] -\frac{1}{2}, +\infty[\text{ على المعرفة على}$$

1- أ- حدد $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x)$ و أول النتائج هندسيا.

ب- حدد $f'(x)$ لكل x من $\left] -\frac{1}{2}, +\infty[$ و أعط جدول تغيرات f

2- أ- بين أن $f''(x) = (2x+1)^{-\frac{5}{2}} (1-x)$ $\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, +\infty[$

ب- بين أن النقطة A ذات الافصول 1 نقطة انعطاف ل (C_f)

4- أنشئ (C_f) $\|i\| = \|j\| = 2cm$

5- ليكن g تقابل من $[0;+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ بما يلي

$$f(x) = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}$$

- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2- أ- تحقق من أن $\forall x \in D - \{-1\} \quad \frac{f(x)}{x+1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار في -1 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

3- بين أن $\forall x \in D - \{-1\} \quad f'(x) = \frac{-3}{2x^3 \sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}}$ و أعط جدول تغيرات الدالة f

- 4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)
- 5- أ- لتكن g قصور الدالة f على $]-\infty; -1[$ نحو مجال I ينبغي تحديده.
- ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 6

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$

- 1- أحسب $f(1)$ وحدد D_f
- 2- أ- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في -2 ثم أول النتيجة هندسيا.
- ب- أدرس قابلية اشتقاق f في 1 ثم أول النتيجة هندسيا.
- 3- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]1; +\infty[\cup]-2; 1[$ و أعط جدول تغيرات f
- 4- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)

تمرين 7

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} & x > 0 \\ f(x) = -\frac{x}{2} + \arctan x & x \leq 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة بـ

- 1- أ- حدد $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- ب- تأكد أن f متصلة في 0 .
- 2- أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم اليسار في 0 و أول النتيجتين هندسيا.
- 3- أ- بين أن f تزايدية قطعاً على $]0; +\infty[$.
- ب- حدد $f'(x)$ لكل x من $]-\infty; 0[$.
- ج- أعط جدول التغيرات f .
- 4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)
- أ- لتكن g قصور الدالة f على $]0; +\infty[$ نحو مجال I ينبغي تحديده
- ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 8

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x} & x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x & x < 0 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

- 1- أحسب $f(8)$; $f(3\sqrt{3})$; $f(-1)$
- 2- أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 و يسار 0 ثم أول النتيجتين هندسيا.
- 3- بين أن

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad f'(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

$$\forall x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)^2}$$

4- حدد جدول تغيرات f

5- أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم.م.م.

6- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1; +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $]1; +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده

ب- أنشئ منحنى الدالة g^{-1}

تمرين 9

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي $f(x) = \sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x} - 1)$

1- أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

2- احسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R}_+^* و أعط جدول تغيرات f

3- أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f

ب- بين أن $A(1; 0)$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f ثم أعط معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

ج- أنشئ في معلم.م.م المنحنى C_f $\| \vec{i} \| = 4cm$

4- ليكن g قصور الدالة f على $I = \left[\frac{1}{8}; +\infty[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده و حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J ثم أنشئ $C_{g^{-1}}$

تمرين 10

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt[3]{x(x-2)} & x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\\ f(x) = x - \sqrt{2x} & x \in]0; 2[\end{cases}$$

1- احسب $f(4)$; $f(-2)$

2- تأكد أن f متصلة في 0 و 2

3- أدرس اشتقاق f على اليمين و اليسار في كل من النقطتين 0 و 2 . و أول النتائج هندسيا .

$$4- \text{ أ - بين أن } \forall x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[\quad f'(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)} \right)^2} \right)$$

$$\forall x \in]0; 2[\quad f'(x) = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

ب- أعط جدول تغيرات f

1- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f

2- ليكن g قصور الدالة f على $I =]2; +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

ب- أنشئ المنحنى $C_{g^{-1}}$

تمرين 11

I- لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي

$$h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}$$

1- أعط جدول تغيرات الدالة h على \mathbb{R}^+

2- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad h(x) \leq 0$

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي

$$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

1- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا.

2- أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f .

3- ليكن g قصور الدالة f على $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$

4- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

(نقبل أن ل C_f نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$).

تمرين 12

نعتبر f دالة عددية معرفة على \mathbb{R}^+ بـ

$$f(x) = 1 - \frac{x}{4}(\sqrt{x} - 2)^2$$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على يمين 0.

2- بين أن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

3- أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f .

ب- بين أن ل C_f نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتها.

4- ليكن g قصور الدالة f على $I = [4; +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{64}{9}; \frac{121}{16}\right[$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J . ثم استنتج أن $\alpha = 4 + 2\sqrt{3}$

د- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

تمرين 13

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي

$$f(x) = 2 \arctan \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

1- أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arctan t}{t}$

ت- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ و أول النتيجة هندسيا

2- أدرس التغيرات الدالة f

3- أنشئ المنحنى C_f

4- نعتبر الدالة g قصور f على $I = [1; +\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

5- بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في $[1;2]$

6- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

أ- أثبت أن $f(2) > \frac{\pi}{3}$

ب- بين أنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 2$

ت- باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية، بين أنه لكل n من \mathbb{N} : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

د- استنتج أن $\lim u_n = \alpha$

تمرين 14

I- (1) بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 - x^2 + x^4$

(2) لتكن h الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ $h(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3$

أ- بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad |h'(x)| \leq x^4$

ب- استنتج أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad |h(x) - h(0)| \leq x^5$

ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = 0$

II- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{2x^2 + 2x + 1} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1- أدرس تغيرات g (النهايات ، $g'(x)$ ، جدول التغيرات)

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا غير منعدم α ينتمي إلى $]-1; \frac{-1}{2}[$

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $] -1; +\infty[$

III- لتكن f الدالة المعرفة بما يلي

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x} & x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[\\ f(0) = 0 \quad ; \quad f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$$

1- بين أن f متصلة على $] -1; +\infty[$

2- أحسب $f'(x)$ لكل x من $] -1; 0[\cup]1; +\infty[$ و استنتج تغيرات الدالة f

أ-3- باستعمال السؤال (I - 2 - ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x^2}$ ثم أول النتيجة هندسيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين -1

4 - أنشئ المنحنى C_f (نأخذ $\alpha = -\frac{3}{4}$; $f(\alpha) = \frac{2}{3}$)