

تمارين حول النهايات و الاتصال

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضة

تمرين 1

$$\text{حدد } \arctan \left(\tan \frac{-73\pi}{3} \right) ; \quad \arctan \sqrt{3}$$

تمرين 2

مثل مبيانيا الدالتين $f : x \rightarrow \arctan(\tan x)$

تمرين 3

1- حدد النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x-3}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x + 2x \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \times \sin \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan \frac{1}{x^2 - 1} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 2x}}{\sqrt{x-3}} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x} - \sqrt[3]{x^3 + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{3}}{x - \sqrt{3}} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

2- حدد حسب قيم البرامترين الحقيقيين m و n النهايات التالية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{m}{x^3 - 1} \right) \text{ ب-} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 1} + mx) \text{ أ-}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-m)(x-n)}{x^2 + x} \text{ د-} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{mx}{(x^2-1)^2} \right) \text{ ج-}$$

تمرين 4

نعتبر f دالة المعرفة $I = \left[\frac{1}{4}; +\infty \right[$ بـ $f(x) = 2x^2 - x + 1$

بين أن f تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 5

1- بين أن المعادلة $1 - x - \sin x = 0$ تقبل حلا في المجال $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$.

2- بين أن المعادلة $x^4 - \frac{4}{x} = x$ تقبل حلا في المجال $[1; 2]$.

3- بين أن المعادلة $\sum_{i=1}^n \cos(ix)$ تقبل على الأقل حلا في $[0; \pi]$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

تمرين 6

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ حيث $f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$.
بين أنه يوجد c من $[a; b]$ حيث $f(c) = bc$.

تمرين 7

1- حل في \mathbb{R} في المعادلات

$$\text{أ - } x^3 + 27 = 0 \quad \text{ب - } \left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \right)^3 + 125 = 0 \quad \text{ج - } \arctan(x^2 - x + 2) = 0$$

$$\text{د - } \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt{1-x^2} \quad \text{وضع } t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

2- حل في \mathbb{R} المتراجحتين التاليتين $\arctan(x^2 - 2x) > 0$ و $\arctan(\sqrt{x+2}) < \arctan(x+1)$

تمرين 8

$$\text{1- أحسب } \arctan\left(\tan\left(-\frac{31\pi}{3}\right)\right) ; \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{2- أحسب } \arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{2}$$

$$\text{3- بين أن } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^* \quad \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

تمرين 9

بين أن الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ $f(x) = \arctan(\tan 2x)$ تأليفة على مجالات ثم مثلها مبيانيا.

تمرين 10

حدد مجموعة تعريف الدالة f و ادرس اتصالها في هذه المجموعة

$$f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

تمرين 11

$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2} & x \geq 3 \\ f(x) = x - 1 + \sqrt[3]{3-x} & x < 3 \end{cases}$$

نعتبر f دالة المعرفة بـ

1- حدد D_f و نهايات عند محداتها .

2- أدرس اتصال f .

3- ليكن g قصور الدالة f على $[3; +\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من $[3; +\infty[$ نحو المجال J يجيب تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 15

$$\begin{cases} f(x) = 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ f(x) = 1 & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ

1- أدرس اتصال الدالة f

2- أدرس اتصال الدالة $f \circ f$. ما ذا تستنتج؟

تمرين 16

لتكن f دالة معرفة من $[0; 1]$ نحو $[0; 1]$ ومتصلة على $[0; 1]$

1- بين أن $\exists x_0 \in [0; 1] / f(x_0) = x_0$

2- بين أن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists a_n \in [0; 1] / f(a_n) = a_n^n$

تمرين 17

لتكن f دالة معرفة من $[a; b]$ نحو $[a; b]$ ومتصلة على $[a; b]$ بين أن f تقبل نقطة صامدة

تمرين 18

ليكن λ عددا حقيقيا من $[0; 1]$ لتكن f و g دالتين متصلتين على $[a; b]$ حيث $\forall x \in [a; b] \quad f(x) \leq g(x)$ بين إذا كان لكل من f و g نقطة صامدة فإن الدالة h المعرفة على $[a; b]$ بما يلي $h(x) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$ تقبل أيضا نقطة صامدة

تمرين 19

لتكن f دالة متصلة و موجبة على \mathbb{R}^+ . نفترض أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} < 1$

بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل على الأقل حلا في \mathbb{R}^+

تمرين 20

لتكن f دالة متصلة على $[a; b]$ و $x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n$ عناصر من $[a; b]$

بين أنه يوجد c من $[a; b]$ حيث $f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$

تمرين 21

لتكن f دالة عددية متصلة على $[0; 1]$

بين أنه $\exists c \in [0; 1] \quad / \quad f(c) = \frac{1}{c} + \frac{1}{c-1}$

تمرين 22

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x$

1- أ- بين أن القصور g للدالة f على $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ تقابل من $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

2- أ- بين أن القصور h للدالة f على $\left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$ تقابل من $\left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$ نحو مجال J يجب تحديده

ب- حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 23

نعتبر f دالة المعرفة بـ

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- أدرس اتصال f في 0

2- أدرس زوجية f ثم رتابتها

3- أ- بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال I يجب تحديده

ب- حدد f^{-1}

ج- استنتج تعبيرا مبسطا لـ $f(x)$