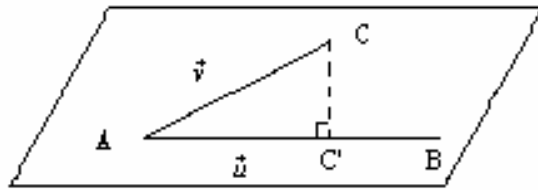


## الجداء السلمي و تطبيقاته في الفضاء

### I-الجداء السلمي

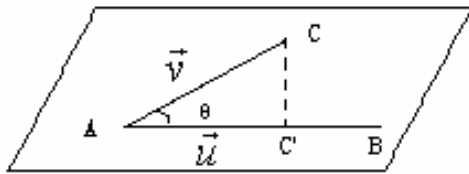
#### 1- تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء  $V_3$  و A نقطة من الفضاء E .  
توجد نقطتان B و C من الفضاء حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  الجداء السلمي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  هو العدد الحقيقي  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  المعروف كما يلي  
\* إذا كان  $\vec{u} \neq \vec{0}$  و  $\vec{v} \neq \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}'$  حيث C' المسقط العمودي لـ C على (AB)  
\* إذا كان  $\vec{u} = \vec{0}$  أو  $\vec{v} = \vec{0}$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



#### 2- صيغة أخرى للجداء السلمي

لتكن  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  متجهتين غير منعدمتين من الفضاء  $V_3$  و A و B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  و  $\theta$  قياس الزاوية  $[\widehat{BAC}]$  و C' المسقط العمودي لـ C على (AB)



لدينا  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}'$

\* إذا كان  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  فإن  $\overrightarrow{AC}' = \overrightarrow{AC} \cos \theta$

ومنه  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cos \theta = AB \times AC \cos \theta$

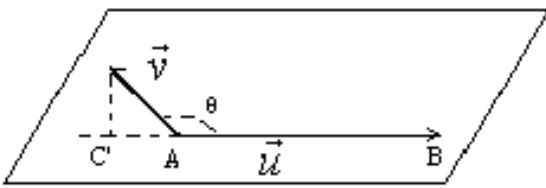
\* إذا كان  $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$  فإن

$\overrightarrow{AC}' = \overrightarrow{AC} \cos(\pi - \theta) = -\overrightarrow{AC} \cos \theta$

ومنه  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cos \theta = AB \times AC \cos \theta$

\* إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{2}$  فإن  $\overrightarrow{AC}' = 0$  و منه  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

إذن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \cos \theta$



#### خاصة

إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير منعدمتين من الفضاء  $V_3$  و A و B و C ثلاث نقط من الفضاء حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  و  $\theta$  قياس الزاوية  $[\widehat{BAC}]$  فإن  $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \cos \theta$

#### خاصة

لتكن  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{CD}$  متجهتين غير منعدمتين المسقطان العموديان لـ C' ; D' على (AB) بالتوالي.

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء  $V_3$ .

تكون  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدين إذا وفقط إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  نكتب  $\vec{u} \perp \vec{v}$

ملاحظة المتجهة  $\vec{0}$  عمودية على أية متجهة من الفضاء  $V_3$

ب- منظم متجهة

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و  $A$  و  $B$  نقطتين من الفضاء حيث  $\vec{u} = \overline{AB}$  ومنه  $\vec{u} \cdot \vec{u} = AB^2$

إذن لكل متجهة غير منعدمة  $\vec{u}$   $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$

العدد الحقيقي  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  يسمى المربع السلمي لـ  $\vec{u}$  و يكتب  $\vec{u}^2$

العدد  $\sqrt{\vec{u}^2}$  يسمى منظم المتجهة  $\vec{u}$  و يكتب  $\|\vec{u}\|$

ملاحظة \*  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$

\* إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير منعدمتين وكان  $\theta$  قياس الزاوية  $\widehat{BAC}$  حيث  $\vec{u} = \overline{AB}$

و  $\vec{v} = \overline{AC}$  فان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta$

ج- خاصيات

متطابقات هامة  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$

$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in V_3^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  \*

$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$  \*  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  \*

$\vec{u} \cdot \alpha \vec{v} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$  \*

II- صيغ تحليلية

1- الأساس و المعلم المتعامدان الممنظمان

تعريف

لتكن  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  ثلاث متجهات غير مستوائية من الفضاء  $V_3$  و  $O$  نقطة من الفضاء.

$(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  أساس للفضاء  $V_3$

يكون الأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  متعامد (أو المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات

$\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  متعامدة متنى متنى.

يكون الأساس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  متعامد و ممنظم (أو المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  متعامد و ممنظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$  و  $\vec{k}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{i}$  متعامدة متنى متنى

2- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

أ- خاصة

الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

إذا كانت  $\vec{u}(x; y; z)$  و  $\vec{v}(x'; y'; z')$  فان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

ملاحظة

إذا كانت  $\vec{u}(x; y; z)$  بالنسبة للمعلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  فان  $\vec{u} \cdot \vec{i} = x$  ;  $\vec{u} \cdot \vec{j} = y$  ;  $\vec{u} \cdot \vec{k} = z$

ب- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة بين نقطتين

\*- إذا كانت  $\vec{u}(x; y; z)$  بالنسبة للمعلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  فان  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

\*- إذا كانت  $A(x_A; y_A; z_A)$  و  $B(x_B; y_B; z_B)$  بالنسبة للمعلم م.م.م  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

فان  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

### تمارين

- 1- حدد متجهة  $\vec{w}$  واحدة وعمودية على  $\vec{u}(-1;1;1)$  و  $\vec{v}(1;-2;0)$   
2- حدد متجهة  $\vec{w}$  عمودية على  $\vec{u}(1;1;0)$  و  $\vec{v}(0;2;1)$  و  $\|\vec{w}\| = \sqrt{3}$

### تمارين

نعتبر  $A(1;1;\sqrt{2})$  و  $B(\sqrt{2};-\sqrt{2};0)$  و  $C(-1;-1;-\sqrt{2})$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

### III- تطبيقات الجداء السلمي في $V_3$

#### 1- تعامد المستقيمت و المستويات في الفضاء

##### أ- تعامد مستقيمتين

ليكن  $(D_1)$  و  $(D_2)$  مستقيمتين من الفضاء موجهتين بالمتجهتين  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  على التوالي

$$(D_1) \perp (D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

##### ب- تعامد مستقيم و مستوى

##### خاصية

ليكن  $(P)$  مستوى موجه بالمتجهتين  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  و  $(D)$  مستقيم موجه بالمتجهة  $\vec{u}_3$

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_3 \text{ و } \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$$

##### ج- ملاحظات واصطلاحات

- \* المتجهة  $\vec{u}$  الموجهة لمستقيم  $(D)$  العمودي على مستوى  $(P)$  تسمى متجهة منظمية للمستوى  $(P)$ .
- \* إذا كانت  $\vec{u}$  منظمية لمستوى  $(P)$  فإن كل متجهة  $\vec{v}$  مستقيمية مع  $\vec{u}$  تكون منظمية للمستوى  $(P)$
- \* إذا كانت  $\vec{u}$  منظمية لمستوى  $(P)$  و  $\vec{v}$  منظمية لمستوى  $(P')$  وكانتا  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فإن  $(P)$  و  $(P')$  متوازيان

\* إذا كان  $(A;B) \in (P)^2$  و  $\vec{u}$  منظمية لمستوى  $(P)$  فإن  $\vec{u} \perp \overline{AB}$

### تمارين

حدد تمثيل بارامتري للمستقيم  $(D)$  المار من  $A(-1; 2; 0)$  و العمودي على المستوى  $(P)$  الموجه بالمتجهتين  $\vec{u}(1;-1;1)$  و  $\vec{v}(2;1;1)$

### تمارين

في الفضاء المنسوب إلى معلم م.م.  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  نعتبر المستوى  $(P)$  الذي معادلته  $ax-2y+z-2=0$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و المستقيم } (D) \text{ تمثله بارامتري}$$

1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى  $(P)$

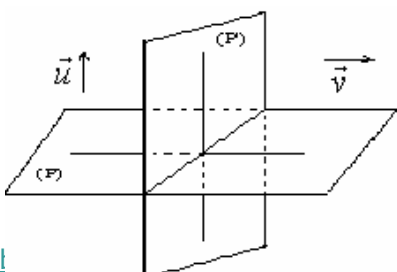
2- حدد  $a$  و  $b$  لكي يكون  $(D) \perp (P)$

#### د- تعامد مستويين

تذكير يكون مستويان متعامدين إذا و فقط إذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

##### خاصية

ليكن  $(P)$  و  $(P')$  مستويين من الفضاء و  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين منظمتين لهما على التوالي  $\vec{u} \perp \vec{v}$  إذا و فقط إذا كان  $(P') \perp (P)$



### 3- معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

#### a. مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

##### مبرهنة

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء  
\* المستوى المار من A و المتجهة  $\vec{u}$  منظمة له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$   
\* مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$  المستوى المار من A و المتجهة  $\vec{u}$  منظمة له

#### b. معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمة عليه

##### خاصة

\* كل مستوى (P) في الفضاء و  $\vec{u}(a;b;c)$  منظمة عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع  $ax + by + cz + d = 0$   
\* كل معادلة ديكارتية من نوع  $ax + by + cz + d = 0$  حيث  $(a;b;c) \neq (0;0;0)$  هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث  $\vec{u}(a;b;c)$  منظمة عليه  
\* في الفضاء معادلة المستوى (P) المار من  $A(x_0;y_0;z_0)$  و المتجهة  $\vec{u}(a;b;c)$  منظمة عليه هي:  
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

#### (4) مبرهنة

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء و k عددا حقيقيا  
مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = k$  هي المستوى (P) العمودي على  $D(A;\vec{u})$  في النقطة H

$$\text{حيث } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{AH} = \frac{k}{AB}$$

#### تمرين

$$(D): \begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \quad (P) : 2x-y+3z+1=0 \quad \text{نعتبر}$$

- 1- حدد متجهة  $\vec{u}$  منظمة على (P) ونقطة منه.
- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و  $\vec{n}(1,2,1)$  منظمة عليه.
- 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A' (2;0;3) والعمودي على (D)
- 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من A (2;0;3) و الموازي لـ (P)

#### دراسة الأوضاع النسبية للمستقيمت و المستويات في الفضاء

- أ- الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء
- (P) المستوى المار من A و  $\vec{u}$  منظمة عليه (P') المستوى المار من A' و  $\vec{v}$  منظمة عليه
- الحالة 1  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتان
- إذا كان (P')  $A \in (P)$  أو  $A' \in (P)$  فان  $(P') = (P)$
- إذا كان (P')  $A \notin (P)$  و  $A' \notin (P)$  فان (P) و (P') متوازيان قطعا.
- الحالة 2  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين
- $(P') \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير متعامدين فان (P) و (P') متقاطعان.

#### ب- الأوضاع النسبية لمستقيم ومستوي في الفضاء

- (P) المستوى المار من A و  $\vec{u}$  منظمة عليه (D) المستقيم المار من A' و  $\vec{v}$  موجهة له
- الحالة 1 إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فان  $(D) \perp (P)$
- الحالة 2  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow (P) \text{ و } (D) \text{ متوازيان}$
- إذا كان  $\vec{u} \not\perp \vec{v}$  فان (D) يخترق (P)

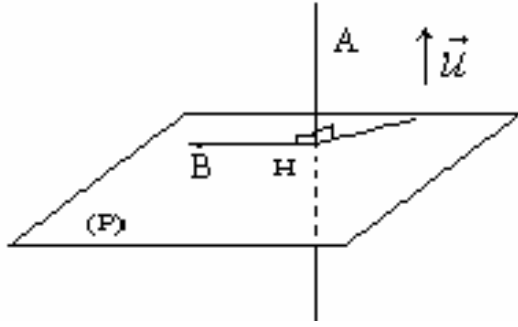
#### IV مسافة نقطة عن مستوى

##### 1- تعريف و خاصة

الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م  $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$   
 مسافة نقطة A عن مستوى (P) هي المسافة AH حيث H المسقط العمودي لـ A على (P) نكتب

$$d(A; (P)) = AH = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

حيث  $B \in (P)$  و  $\vec{u}$  منظمية على (P)



## 2- خاصة

ليكن (P) مستوى معادلته  $ax + by + cz + d = 0$  و  $A(x_0; y_0; z_0)$  نقطة من الفضاء

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

## مثال

ليكن (P) مستوى مار من  $B(2; 1; 3)$  و  $\vec{u}(1; -1; \sqrt{2})$  منظمية عليه لتكن  $A(1; 2; 0)$

حدد  $d(A; (P))$

## تمرين 1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .  
 نعتبر  $A(1; -1; 1)$  و  $B(3; 1; -1)$  و (P) المستوى ذا المعادلة  $2x - 3y + 2z = 0$  و (D) المستقيم الممثل

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{بارا متريا بـ}$$

- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)
- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من A و B والعمودي على المستوى (P) أحسب  $d(A; (D))$  و  $d(A; (P))$
- 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q'') المار من B و الموازي للمستوى (P)

## تمرين 2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.  
 نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة  $3x + 2y - z - 5 = 0$  و (D) المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- 1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)